Devoir maison n° 7

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être $\boxed{\text{encadrés}}$.
La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.
Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Dans tout le problème, E désigne un ensemble non vide.

Pour toute partie $A \subset E$, on appelle **fonction indicatrice** de A l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ définie par

$$\forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} .$$

Notation. Dans toute la suite, on note $\overline{A}$ le complémentaire d'une partie A de E.

A Propriété des fonctions indicatrices

1. Expliciter les fonctions $\mathbb{1}_E$ et $\mathbb{1}_\emptyset$.

Soit A et B deux parties de E.

2. Montrer que $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) \leqslant \mathbb{1}_B(x)$.
3. En déduire que $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$. *(Indication : on rappelle que deux fonctions f et g sont égales si et seulement si $f(x) = g(x)$ en tout point x de leur ensemble de définition)*
4. Montrer que $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.
5. Montrer que $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$ puis que $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$.
6. En déduire que $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A \times (1 - \mathbb{1}_B)$.
7. On suppose (seulement pour cette question) que $A \cap B = \emptyset$. Montrer que $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$.
8. (A et B sont de nouveau quelconques) Déduire de ce qui précède que $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$.

B Différence symétrique

Étant données deux parties A et B de E, on définit la **différence symétrique** de A et B, notée $A\Delta B$, par

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

On remarque que $A\Delta B = B\Delta A$ (propriété de commutativité).

9. Représenter la différence symétrique de deux ensembles à l'aide d'un dessin assez joli et assez explicite.
10. Déterminer $A\Delta\emptyset$, $A\Delta E$ et $A\Delta A$.
11. Exprimer $\mathbb{1}_{A\Delta B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
12. Montrer à l'aide des fonctions indicatrices que
    (a) $\forall A,B \in \mathcal{P}(E)$, $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,
    (b) $\forall A,B,C \in \mathcal{P}(E)$, $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$.