Problème 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Étant donnée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction continue, on appelle (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

A Propriétés générales

On suppose dans toute cette partie que $f(I) \subset I$. On dit que I est un intervalle **stable** par f. On se convaincra aisément que cela revient à la formulation équivalente suivante : pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.

1. On procède par récurrence : $u_0 \in I$ et pour $n \in \mathbb{N}$, si $u_n \in I$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in I$ par stabilité. Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \in I}$.
2. On suppose dans cette question que f est croissante.
   (a) On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$. Tout d'abord $u_0 \leqslant u_1$. Puis pour $n \in \mathbb{N}$, si $u_n \leqslant u_{n+1}$, alors par croissance de f, $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$. Donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.
   Si $u_0 \geqslant u_1$, un raisonnement analogue montre que $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$.
   (b) Dans le cas où $I = [a,b]$ est borné (avec $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$), avec $u_0 \in I$ et Comme f croissante, (u_n) est monotone d'après 2a. De plus, (u_n) est bornée par $[a,b]$ d'après 1. Donc $\boxed{(u_n) \text{ est convergente}}$.
   (c) On a la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n. Lorsque n tend vers $+\infty$, $u_{n+1} \to \ell$ et par continuité de f, $f(u_n) \to f(\ell)$.
   Finalement $\boxed{\ell = f(\ell)}$.
3. On suppose dans cette question que f est décroissante. On pose, pour tout n, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   (a) Comme $f(I) \subset I$, $f(f(I)) \subset f(I)$ (résultat classique sur les images directes de deux parties incluses l'une dans l'autre, ou bien refaire le raisonnement dans le cas présent).
   Or $f(I) \subset I$. Donc $f(f(I)) \subset I$, et donc $\boxed{I \text{ est un intervalle stable par } f \circ f}$.
   (b) Soit $x \leqslant y$ deux réels. Par décroissance de f, $f(x) \geqslant f(y)$, puis à nouveau : $f(f(x)) \leqslant f(f(y))$. Donc $(f \circ f)(x) \leqslant (f \circ f)(y)$, ce qui montre que $\boxed{f \circ f \text{ est croissante}}$.
   (c)
   - $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n}))$. Finalement $\boxed{v_{n+1} = (f \circ f)(v_n)}$.
   - On obtient de même $\boxed{w_{n+1} = (f \circ f)(w_n)}$.

   (d)
   - D'après la relation de récurrence précédente, $f \circ f$ étant croissante, $\boxed{(v_n) \text{ et } (w_n) \text{ sont monotones}}$.
   - De plus par décroissance de f, si $u_{2n} \leqslant v_{2n+2}$, alors $u_{2n+1} = f(u_{2n}) \geqslant f(u_{2n+2}) = u_{2n+3}$.
     Ainsi, si $v_n \leqslant v_{n+1}$, alors $w_n \geqslant w_{n+1}$.
     On a de même : si $v_n \geqslant v_{n+1}$, alors $w_n \leqslant w_{n+1}$.
     Ceci montre que $\boxed{(v_n) \text{ et } (w_n) \text{ sont de monotonies contraires}}$.

   (e) Comme dans la question 2c, on passe à la limite dans la relation $v_{n+1} = (f(f(v_n))$ par continuité de $f \circ f$, ce qui donne $\boxed{\ell = f(f(\ell))}$.

B Étude de deux exemples

4. On pose $f : x \mapsto \sqrt{x+2}$.
   (a) • La fonction $\sqrt{}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   • La fonction $x \mapsto x+2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et $x+2>0 \Leftrightarrow x>-2$.

   Par composition, f est définie sur $[-2,+\infty[$ et dérivable sur $]-2,+\infty[$.
   Elle est strictement croissante sur $]-2,+\infty[$ et on a les valeurs $f(-2)=0$, $f(0)=\sqrt{2}$ et $f(2)=2$, ainsi que la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
   Donc $f([0,2[) = [\sqrt{2},2[\subset [0,2[$ et $f(]2,+\infty[) =]2,+\infty[$.
   Donc $\boxed{[0,2[\text{ et }]2,+\infty[\text{ sont des intervalles stables par } f}$.

   (b) $f(x)=x \Rightarrow x+2=x^2 \Rightarrow x=2$ ou -1. Réciproquement, seule $\boxed{2 \text{ est solution}}$.
   De plus $\boxed{f(x)-x>0 \text{ si } x<2 \text{ et } f(x)-x<0 \text{ si } x>2}$.

   (c) On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} u_0 \in [0,2[\\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$.
   • D'après 1, $u_n \in [0,2[$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   • D'après 2, comme f est croissante, (u_n) est monotone.
   • $u_1-u_0 = f(u_0)-u_0 > 0$ donc (u_n) est croissante.
   • Dans tous les cas, (u_n) est convergente et sa limite est a.

   (d) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \in [2,+\infty[$, (u_n) est décroissante et minorée donc converge et sa limite vaut 2.

5. On pose $g : x \mapsto \cos(x)$ et $I = \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
   (a) La fonction cos, définie sur $\mathbb{R}$, réalise une bijection décroissante de I dans $[0,1]$. Ainsi $g(I) = [0,1] \subset I$. Donc $\boxed{I \text{ est un intervalle stable par } g \text{ et donc par } g\circ g}$ (par 3a).

   (b) $x \mapsto g(x)-x$ est bijective sur I (car sa dérivée est négative) et vaut 1 en 0 et -1 en $\frac{\pi}{2}$.
   Donc $\boxed{g(x)-x=0 \text{ admet une unique solution } \alpha\in I}$.
   Ainsi $g([0,\alpha]) = [\alpha,1] \subset \left[\alpha,\frac{\pi}{2}\right]$, donc $g(g([0,\alpha])) \subset g\left(\left[\alpha,\frac{\pi}{2}\right]\right) = [0,\alpha]$.
   De même $g\left(g\left(\left[\alpha,\frac{\pi}{2}\right]\right)\right) \subset \left[\alpha,\frac{\pi}{2}\right]$.
   Donc $\boxed{[0,\alpha] \text{ et } \left[\alpha,\frac{\pi}{2}\right] \text{ sont des intervalles stables par } g\circ g}$.

   (c) On définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\begin{cases} x_0 \in [0,\alpha[\\ \forall n\in\mathbb{N}, x_{n+1}=g(x_n) \end{cases}$ avec g décroissante. D'après la question 3, (v_n) est croissante et bornée par 0 et α tandis que (w_n) est décroissante et bornée par α et $\frac{\pi}{2}$. Toutes deux convergent donc vers la seule limite possible, solution de $(g\circ g)(x)=x : \alpha$.
   D'après la propriété admise, $\boxed{(x_n) \text{ converge également vers } \alpha}$.

Problème 2

1. Pour $a=b=0$, on a $f(0)=2f(0)$, donc $\boxed{f(0)=0}$.
   Soit $x_0\in\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}$. Tout d'abord, pour $a=x_0$ et $b=x-x_0$, on obtient :
$$f(x) = f(x_0) + f(x-x_0).$$

D'autre part, on a $\lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$ et comme f est continue en 0, $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = f(0) = 0$. Donc par composition de limites, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x - x_0) = 0$. Puis, par opérations sur les limites, $\boxed{\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = (x_0)}$.
D'où le résultat.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x)$, par récurrence sur n.

(a) **Init.** Pour $n = 0$, $f(nx) = 0 = nf(x)$, d'après la question précédente.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $f(nx) = nf(x)$. On a alors :

$$f((n+1)x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x).$$

Donc, d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x)}$.
Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n < 0$. On a $0 = f(0) = f(nx - nx) = f(nx) + f(-nx)$. D'où $f(nx) = -f(-nx)$. Or $-n \in \mathbb{N}$, donc d'après ce qui précède, $f(nx) = -(-n)f(x) = nf(x)$.
Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, f(nx) = nf(x)}$.

(b) Soit $x \in \mathbb{Q}$. Il existe alors $(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \dfrac{m}{n}$. Ainsi $nx = m \times 1$. D'après la question précédente, on a alors $nf(x) = f(nx) = f(m \times 1) = mf(1) = \lambda m$. On en déduit $f(x) = \lambda \dfrac{m}{n} = \lambda x$.
Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = \lambda x}$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = x$.
Comme f est continue en x, on a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(x)$.
D'autre part, comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Q}$, d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = \lambda u_n$. Donc, par opérations sur les limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = \lambda x$. Donc $\boxed{f(x) = \lambda x}$ par unicité de la limite.

2. On a montré que si f est continue en 0 et vérifie (E_1), alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda x$. Réciproquement, on vérifie aisément que s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda x$, alors f est continue en 0 et vérifie (E_1).
On a donc montré par double inclusion :

$$\boxed{\text{L'ensemble des fonctions continues en 0 qui vérifient } (E_1) \text{ est } \{x \mapsto \lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.}$$

3. (a) Par définition :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}}$$

(b) Soient $a,b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\operatorname{th}(a)+\operatorname{th}(b) = \frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1}+\frac{e^{2b}-1}{e^{2b}+1} = \frac{\left(e^{2a}-1\right)\left(e^{2b}+1\right)+\left(e^{2a}+1\right)\left(e^{2b}-1\right)}{\left(e^{2a}+1\right)\left(e^{2b}+1\right)}$$

$$\boxed{\operatorname{th}(a)+\operatorname{th}(b) = \frac{2\left(e^{2(a+b)}-1\right)}{\left(e^{2a}+1\right)\left(e^{2b}+1\right)}}$$

$$1+\operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b) = 1+\frac{\left(e^{2a}-1\right)\left(e^{2b}-1\right)}{\left(e^{2a}+1\right)\left(e^{2b}+1\right)} = \frac{\left(e^{2a}+1\right)\left(e^{2b}+1\right)+\left(e^{2a}-1\right)\left(e^{2b}-1\right)}{\left(e^{2a}+1\right)\left(e^{2b}+1\right)}$$

$$\boxed{1+\operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b) = \frac{2\left(e^{2(a+b)}+1\right)}{\left(e^{2a}+1\right)\left(e^{2b}+1\right)}}$$

$$\operatorname{th}(a+b)\left(1+\operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)\right) = \frac{e^{2(a+b)}-1}{e^{2(a+b)}+1}\times\frac{2\left(e^{2(a+b)}+1\right)}{\left(e^{2a}+1\right)\left(e^{2b}+1\right)} = \frac{2\left(e^{2(a+b)}-1\right)}{\left(e^{2a}+1\right)\left(e^{2b}+1\right)}$$

$$\boxed{\operatorname{th}(a+b)\left(1+\operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)\right) = \operatorname{th}(a)+\operatorname{th}(b)}.$$

Donc $\boxed{\text{La fonction th vérifie } (E_3)}$.

(c) th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{th}'(x) = \frac{\operatorname{ch}^2(x)-\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)} > 0.$$

Donc th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a de plus $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{th}(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{th}(x) = 1$. D'où le résultat, d'après le théorème de la bijection. Donc $\boxed{\text{th réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]-1,1[}$.

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $-x \in \mathbb{R}$ et comme $f(0) = 0$, on a :

$$f(x)+f(-x) = f(0)\left(1+f(x)f(-x)\right) = 0.$$

Donc $f(-x) = -f(x)$.

D'autre part, pour $a = b = x$, on a $2f(x) = f(2x)\left(1+(f(x))^2\right)$. Comme $1+(f(x))^2 > 0$,

$$\boxed{f \text{ est impaire et } \forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}}.$$

(b) Montrons $\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 1$, par récurrence sur n.

Init. Pour $n = 0$, $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = f(x_0) = 1$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 1$. Posons $y = f\left(\frac{x_0}{2^{n+1}}\right)$. D'après la question précédente pour $x = \frac{x_0}{2^{n+1}}$, on a alors :

$$\frac{2y}{1+y^2} = f\left(2\frac{x_0}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 1.$$

On en déduit successivement :

$$\begin{aligned} 2y &= 1 + y^2 \\ 0 &= 1 - 2y + y^2 \\ 0 &= (1-y)^2 \end{aligned}$$

Donc $y = 1$, *i.e.* : $f\left(\dfrac{x_0}{2^{n+1}}\right) = 1$.

Donc, d'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 1}$$

On en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = 1$. D'autre part, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_0}{2^n} = 0$ et f est continue en 0, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = f(0)$. Donc, par unicité de la limite $f(0) = 1$, ce qui contredit $f(0) = 0$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question4a :

$$f(x) = f\left(2\frac{x}{2}\right) = \frac{2f\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}.$$

Posons $y = f\left(\dfrac{x}{2}\right)$. On a $(y-1)^2 = y^2 - 2y + 1 \geq 0$, d'où $2y \leqslant 1 + y^2$, puis $\dfrac{2y}{1+y^2} \leq 1$. De même, $(y+1)^2 = y^2 + 2y + 1 \geq 0$, d'où $-2y \leqslant 1 + y^2$, puis $\dfrac{2y}{1+y^2} \geq -1$. Donc $-1 \leq \dfrac{2y}{1+y^2} \leq 1$. On a donc montré $f(x) \in [-1,1]$.

D'autre part, d'après la question précédente, $f(x) \neq 1$. De plus, comme f est impaire, $-f(x) = f(-x) \neq 1$, donc $f(x) \neq -1$.

Donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \, -1 < f(x) < 1}$$

(d) Soient $a,b \in \mathbb{R}$. On a $|f(a)| < 1$ et $|f(b)| < 1$, d'où $|f(a)f(b)| < 1$ et donc $1 + f(a)f(b) > 0$. Ainsi :

$$f(a+b) = \frac{f(a) + f(b)}{1 + f(a)f(b)} = \frac{\operatorname{th}(g(a)) + \operatorname{th}(g(b))}{1 + \operatorname{th}(g(a))\operatorname{th}(g(b))}.$$

Or, comme th vérifie (E_3) :

$$\frac{\operatorname{th}(g(a)) + \operatorname{th}(g(b))}{1 + \operatorname{th}(g(a))\operatorname{th}(g(b))} = \operatorname{th}(g(a) + g(b)).$$

On en déduit :

$$g(a+b) = \operatorname{argth}(f(a+b)) = g(a) + g(b).$$

Donc $\boxed{g \text{ vérifie } (E_1)}$.

g est continue en 0 car f est continue en 0. Donc d'après les résultats de la partie A :

$$\boxed{\text{Il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \lambda x. \text{ On en déduit } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{th}(\lambda x)}$$

5. On a montré que si f est continue en 0 et vérifie (E_3), alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{th}(\lambda x)$.
   Réciproquement, supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{th}(\lambda x)$, alors f est continue en 0 et comme th vérifie (E_3) :

   $$\forall a,b \in \mathbb{R}, f(a) + f(b) = \operatorname{th}(\lambda a) + \operatorname{th}(\lambda b) = \operatorname{th}(\lambda a + \lambda b)\left(1 + \operatorname{th}(\lambda a)\operatorname{th}(\lambda b)\right) = f(a+b)\left(1 + f(a)f(b)\right).$$

   Donc f vérifie (E_3).

   $$\boxed{\text{L'ensemble des fonctions continues en 0 qui vérifient } (E_3) \text{ est } \{x \mapsto \operatorname{th}(\lambda x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.}$$