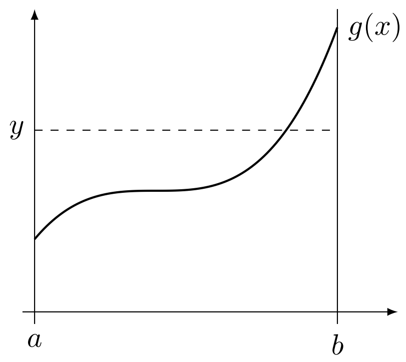
Problème 2

1. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions qui le sont, avec le dénominateur, $x \neq 0$. Et $\forall x \in \mathbb{R}^*$,
$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}.$$
2. On observe que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$, avec $h(x) = x\cos x - \sin x$. Comme $x^2 > 0$ pour tout $x \neq 0$, le signe de $f'(x)$ est donc le même que celui de $h(x)$.
3. $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} = 1$. Donc, f est prolongeable par continuité en 0 par $f(0) = 1$.
4. Taux d'accroissement en 0 : $\forall x \neq 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\sin x - x}{x^2}$.

   À l'aide de l'étude des différences par exemple, on montre que $\forall x > 0$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x$, donc $-\dfrac{x}{6} \leqslant \dfrac{\sin(x) - x}{x^2} \leqslant 0$. D'après le théorème des gendarmes $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0_+]{} 0$. On a le résultat analogue pour la limite en 0_-, par parité par exemple.
   Finalement, $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0}$.

Un théorème d'analyse

1. Dessin expliquant la situation :



2. Soit $A = \{x \in [a,b], g(x) \leq y\}$.
   (a) A est non vide car $g(a) \leqslant y$. De plus, A est majoré par b. Donc, A admet une borne supérieure, notée $c = \sup(A)$.
   (b) C'est la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, que l'on peut aussi redémontrer de manière constructive.
   (c) Par continuité de g, on a $g(c) = \lim\limits_{n \to +\infty} g(x_n) \leqslant y$.
   (d) Si $c = b$, alors $g(c) = g(b) \geqslant y$.
   Si $c < b$, $\forall x \in]c,b]$, $g(x) > y$ car $x \notin A$. Par passage à la limite (continuité et compatibilité avec la relation d'ordre), $g(c) = \lim\limits_{x \to c_+} g(x) \geqslant y$.

Ainsi, on conclut que $g(c) = y$.

3. **Deuxième méthode :**
   Soit les suites (a_n) et (b_n) définies comme dans l'énoncé.
   (a) Dessin laissé aux bons soins du lecteur.
   (b) On vérifie que (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante. De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.
   Ainsi (par récurrence) $b_n - a_n = (b_0 - a_0) \times \frac{1}{2^n}$, qui tend vers 0.
   (a_n) et (b_n) sont donc adjacentes et convergent donc vers une même limite c.
   (c) On montre par récurrence que $g(a_n) \leq y \leq g(b_n)$ pour tout n, et par continuité de g, on obtient $g(c) = y$.