Problème 1

A Étude d'une suite réelle

Soit $c \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $\begin{cases} x_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n^2 + c \end{cases}$.

1. Déterminons la suite (x_n) dans quelques cas particuliers.
   (a) Si $c = 0$, on montre par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = 0}$.
   (b) Avec $c = -2$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2$ puis on montre par récurrence que $\boxed{\forall n \geqslant 2, x_n = 2}$.
   (c) Avec $c = -1$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$.
   Puis on montre par récurrence sur k que $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ x_{2k} = 0 \text{ et } x_{2k+1} = -1}$.
   Init. $x_0 = 0$ et $x_1 = -1$.
   Hér. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $x_{2k} = 0$ et $x_{2k+1} = -1$.
   Alors $x_{2k+2} = (-1)^2 - 1 = 0$ et $x_{2k+3} = 0^2 - 1 = -1$, cqfd.
2. Soit $f : x \mapsto x^2 + c$ et $g : x \mapsto f(x) - x$.
   (a) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$ et possède un minimum en 0, qui vaut c.
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - x + c$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 1 - 4c \begin{cases} > 0 \text{ si } c < \frac{1}{4} \\ = 0 \text{ si } c = \frac{1}{4} \\ < 0 \text{ si } c > \frac{1}{4} \end{cases}$.
   Ainsi $\boxed{g \text{ admet } \begin{cases} 2 \text{ zéros si } c < \frac{1}{4} \\ 1 \text{ zéro si } c = \frac{1}{4} \\ \text{aucun zéro si } c > \frac{1}{4} \end{cases}}$.
   Lorsque $c < \frac{1}{4}$, on a $\boxed{\alpha = \frac{1 - \sqrt{1-4c}}{2} \text{ et } \beta = \frac{1 + \sqrt{1-4c}}{2}}$.
   (c) **1^er^cas : $c < \frac{1}{4}$.** Alors g est négative sur $]\alpha,\beta[$, positive sinon.
   2^e^cas : $c = \frac{1}{4}$. Alors g est positive sur $\mathbb{R}$, nulle en $\frac{1}{2}$.
   3^e^cas : $c > \frac{1}{4}$. Alors g est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
   (d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) - x = (x^2+c)^2 + c - x = x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c = \boxed{(x^2 - x + c)(x^2 + x + (1 + c))}$.
3. On suppose dans cette question que $c \in \left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$.
   (a) Dans ce cas, g est strictement positive, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(x_n) = f(x_n) - x_n = x_{n+1} - x_n > 0$. Donc $\boxed{(x_n) \text{ est strictement croissante}}$.

(b) Si (x_n) admettait une limite finie ℓ, la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ donnerait, par passage à la limite et continuité de f, $\ell = f(\ell)$, *i.e.* $g(\ell) = 0$. Or dans ce cas, on a montré que g ne s'annule pas. Donc $\boxed{(x_n) \text{ n'admet pas de limite finie}}$.

(c) La suite (x_n) est croissante mais ne converge pas, donc $\boxed{(x_n) \text{ tend vers } +\infty}$.

4. On suppose dans cette question que $c \in]-\infty, -2[$.

(a) On procède par récurrence.

$\boxed{\textbf{Init.}}$ $x_2 = c^2 + c$. Or $x_2 - (-c) = c^2 + 2c = c(c+2) > 0$ car $c < 0$ et $c < -2$. Donc $x_2 > -c$.

$\boxed{\textbf{Hér.}}$ Soit $n \geqslant 2$ entier. Supposons $x_n > -c$. Alors $x_{n+1} = x_n^2 + c > c^2 + c$. Comme pour l'initialisation, $c^2 + c > -c$. Donc $x_{n+1} > -c$.

(b) Montrer $\beta < -c$ revient à montrer $1 + \sqrt{1-4c} < -2c$, *i.e.* $\sqrt{1-4c} < -1-2c$. Or $(-1-2c)^2 = 1 + 4c + 4c^2$, d'où $(-1-2c)^2 - (1-4c) = 8c + 4c^2 = 4c(2+c) > 0$ pour $c \in]-\infty, -2[$. Ainsi $(-1-2c)^2 > (1-4c)$ et donc on a bien $\sqrt{1-4c} < -1-2c$ car ces quantités sont positives.

On a donc $x_n > \beta$ pour tout $n \geqslant 2$. Or sur $]\beta, +\infty[$, g est positive.

Donc $\boxed{(x_n) \text{ est strictement croissante (à partir du rang 2)}}$.

(c) On admet que (x_n) n'a pas de limite finie. Elle diverge alors vers $+\infty$.

5. On suppose dans cette question que $c \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$.

(a) f est croissante sur $[0,\alpha[$ avec $f(0) = c > 0$ et $f(\alpha) = \alpha$.

Donc $f([0,\alpha[) \subset [0,\alpha[$, *i.e.* $\boxed{[0,\alpha[\text{ est stable par } f}$.

On montre alors facilement par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ x_n \in [0,\alpha[}$.

(b) Comme g est positive sur $]-\infty,\alpha[$, $\boxed{(x_n) \text{ est strictement croissante}}$.

(c) Elle est de plus bornée (par 0 et α) donc elle converge. Sa limite est nécessairement un point fixe de f et un élément de l'intervalle $[0,\alpha]$. Donc $\boxed{(x_n) \text{ converge vers } \alpha}$.

6. On suppose dans cette question que $c \in \left[-\frac{3}{4}, 0\right[$.

(a)
- Montrer $\alpha > c$ revient à montrer $1 - \sqrt{1-4c} > 2c$, *i.e.* $1 - 2c > \sqrt{1-4c}$. Or $(1-2c)^2 = 1 - 4c + 4c^2 > 1 - 4c$ et ces quantités sont positives, donc on a bien $1 - 2c > \sqrt{1-4c}$.
- Comme $c < 0$, on a $1 - 4c > 1$, d'où $\sqrt{1-4c} > 1$ et donc $\boxed{\alpha < 0}$.

(b) D'après la question 2d, $f(f(x)) - x = 0$ si et seulement si $g(x) = 0$ ou $x^2 + x + (1+c) = 0$.

Ce dernier trinôme a pour discriminant $1 - 4(1+c) < 0$ car $1 + c > \dfrac{1}{4}$.

Donc les seuls point fixes de $f \circ f$ sont $\boxed{\alpha \text{ et } \beta}$ les zéros de g.

(c) f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ donc sur $[c,0]$. Donc $\boxed{f \circ f \text{ est croissante sur } [c,0]}$.

En effet $c \leqslant x \leqslant y \leqslant 0 \Rightarrow f(y) \leqslant f(x) \Rightarrow f(f(x)) \leqslant f(f(y))$.

(d) Comme $\alpha < 0$, $f(f(\alpha)) < f(f(0))$, *i.e.* $\boxed{\alpha < f(c)}$.

On a $f(c) = c^2 + c = c(c+1) < 0$ donc $f([\alpha,0[) =]c,\alpha]$ puis $f(]c,\alpha]) = [\alpha,f(c)[\subset [\alpha,0[$. Donc $\boxed{[\alpha,0[\text{ est stable par } f \circ f}$.

(e) Soit $(u_n) = (x_{2n})$. Elle vérifie $u_{n+1} = f(f(u_n))$. Comme $f \circ f$ est croissante, on a (u_n) monotone et comme $u_1 = x_2 < 0 = u_0$, $\boxed{(x_{2n}) \text{ est décroissante}}$.

Par stabilité de $[c,0[$, on a $\forall n \geqslant 1$, $x_{2n} \in [c,0[$ (récurrence).

Donc (x_{2n}) est décroissante et minorée donc $\boxed{\text{converge}}$ vers le seul point fixe de $f \circ f$ présent dans l'intervalle $[c, 0]$, à savoir $\boxed{\alpha}$.

(f) De manière analogue aux deux questions précédentes, on montre que $[c,\alpha]$ est stable par $f \circ f$. Ainsi (x_{2n+1}) est monotone et bornée par c et α, donc $\boxed{\text{elle converge vers } \alpha}$, seul point fixe de $f \circ f$ dans l'intervalle $[c,\alpha]$.

(g) (x_{2n}) et (x_{2n+1}) étant deux suites extraites particulières de (x_n) formant une partition des termes de cette dernière, on a $\boxed{x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha}$.

7. On suppose dans cette question que $c \in \left]-2, -\frac{3}{4}\right[$.

   (a) $f(c)+c = c^2+2c = c(c+2) < 0$ et $f(c)-c = c^2 > 0$. Ainsi $-c < f(c) < c$, soit $\boxed{|f(c)| < c}$. Il en est de même pour $f(-c)$ car f est paire (ou par le même calcul).

   (b) f est décroissante puis croissante, admet pour minimum c en 0. Ainsi $[-c,c]$ est stable par f et donc (par récurrence) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in [-c,c]}$.

8. Bilan : $\boxed{A = \left[-2, \frac{1}{4}\right]}$.

Étude d'une suite complexe

Soit maintenant $c \in \mathbb{C}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres complexes définie par $\begin{cases} z_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$.
Cette définition dépend bien sûr du nombre c fixé. Si nécessaire, on notera $z_n(c)$ les nombres z_n ainsi définis. Comme dans la première partie, le but du problème est d'étudier l'ensemble

$$B = \left\{c \in \mathbb{C},\ (|z_n(c)|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne tend pas vers } +\infty\right\}.$$

9. Préliminaires.

   (a) Si $(|z_n|)$ est bornée, alors elle est majorée donc il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |z_n| \leqslant M$. Ceci est, en particulier, contraire à la définition de divergence vers $+\infty$. Et donc $\boxed{c \in B}$.

   (b) Étude d'un cas particulier : avec $c = i$, $z_1 = i$, $z_2 = -1+i$ puis $z_3 = (-1+i)^2 + i = -i$, $z_4 = -1+i$, *etc.*
   On montre alors par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 1,\ z_{2n-1}(i) = -i \text{ et } z_{2n}(i) = -1+i}$. Cette suite est bornée (de module borné par $\sqrt{2}$), donc $\boxed{i \in B}$.

   (c) Par récurrence :
   - $z_0(\overline{c}) = 0 = \overline{z_0(c)}$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $z_n(\overline{c}) = \overline{z_n(c)}$.
     Alors $z_{n+1}(\overline{c}) = z_n(\overline{c})^2 + \overline{c} = \overline{z_n(c)}^2 + \overline{c} = \overline{z_n(c)^2 + c} = \overline{z_{n+1}(c)}$.

   Ainsi $(|z_n(c)|) = (|z_n(\overline{c})|)$. Ces deux suites étant égales, l'une diverge vers $+\infty$ si et seulement si l'autre également. Donc $\boxed{c \in B \Leftrightarrow \overline{c} \in B}$.

10. Supposons que $|c| \leqslant \frac{1}{4}$. On procède par récurrence : l'hérédité repose sur le fait que pour $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow |z_{n+1}| \leqslant |z_n|^2 + |c| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{4}$. Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ |z_n| \leqslant \frac{1}{2}}$. D'après la question 9a, $\boxed{c \in B}$.

11. c est à nouveau quelconque.

(a) Le discriminant de l'équation $x^2 = x+|c|$ est $1+4|c| > 0$ et même > 1. Ainsi des deux racines réelles $\dfrac{1 \pm \sqrt{1+4|c|}}{2}$, une est strictement positive, et même $\boxed{r = \dfrac{1+\sqrt{1+4|c|}}{2} > 1}$ car $\sqrt{1+4|c|} > 1$.

(b) Il suffit de mettre au même dénominateur 2 : $\boxed{|c| - r = \dfrac{2|c|-1-\sqrt{1+4|c|}}{2}}$.

(c) Si $|c| > 2$, $(2|c|-1)^2 = 4|c|^2 - 4|c| + 1$ et $(2|c|-1)^2 - (1+4|c|) = 4|c|^2 - 8|c| = 4|c|(|c|-2) > 0$, donc $2|c| - 1 > \sqrt{1+4|c|}$ car ces quantités sont positives. D'où $|c| - r > 0$ et donc $\boxed{|c| > r}$.

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $e_n = |z_n| - r$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(r+e_n)^2 = |z_n^2| = |z_{n+1} - c| \leqslant |z_{n+1}| + |c|$ par inégalité triangulaire. Donc $(r+e_n)^2 \leqslant e_{n+1} + \underbrace{r + |c|}_{r^2}$. Donc $\boxed{(r+e_n)^2 \leqslant r^2 + e_{n+1}}$.

(b) Cela donne $(r+e_n)^2 - r^2 \leqslant e_{n+1}$. Or $(r+e_n)^2 - r^2 = e_n(2r+e_n) = 2re_n + e_n^2 \geqslant 2re_n$.
Donc $\boxed{2re_n \leqslant e_{n+1}}$.

(c) $z_1 = c$ et on a montré qui si $|c| > 2$, $|c| > r$. Donc $e_1 > 0$.

Par ailleurs, on a montré pour tout k que $\dfrac{e_{k+1}}{e_k} \geqslant 2r$. Donc $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{e_{k+1}}{e_k} \geqslant (2r)^{n-1}$. On a alors un produit télescopique qui donne $\boxed{\dfrac{e_n}{e_1} \geqslant (2r)^{n-1}}$.

(d) Comme $r > 1$, $(2r)^{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Donc (e_n) n'est par bornée et donc $(|z_n|)$ diverge vers $+\infty$, donc $\boxed{c \notin B}$.

13. Bilan : on a $\boxed{\left\{c \in \mathbb{C}, \dfrac{1}{4} \leqslant c\right\} \subset B \subset \{c \in \mathbb{C}, c \leqslant 2\}}$.

B est compris entre les disques centrés en 0 de rayons $\dfrac{1}{4}$ et 2.

Étude d'un cas particulier

On fixe pour cette partie $c = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{8}i$.

14. (a) Le discriminant de l'équation $z^2 - z + c = 0$ est $\Delta = 2 - \dfrac{3}{2}i$. Un calcul de racines carrées donne $\delta = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}i$ tel que $\delta^2 = \Delta$. D'où les solutions $\boxed{\beta = \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{4}i \text{ et } \alpha = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}i}$.

(b) On a bien $|\alpha| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4} = \boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}$.

(c) $|z_1 - \alpha| = |c - \alpha| = \left|\dfrac{1}{8}i\right|$. Donc $\boxed{|z_1 - \alpha| = \dfrac{1}{8}}$.

15. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$|z_{n+1} - \alpha| = |z_n^2 + c - \alpha|$. Or $c - \alpha = -\alpha^2$.
Donc $|z_{n+1} - \alpha| = |(z_n - \alpha)(z_n + \alpha)| = |z_n - \alpha||z_n - \alpha + 2\alpha|$. Par inégalité triangulaire (et car $|z_n - \alpha| \geqslant 0$), on a bien $\boxed{|z_{n+1} - \alpha| \leqslant |z_n - \alpha|\,(|z_n - \alpha| + 2|\alpha|)}$.

On montre alors par récurrence l'inégalité souhaitée. L'initialisation vient de la question précédente. Puis pour $n \in \mathbb{N}^*$, si $|z_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{8}$, alors $|z_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Or $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \dfrac{3}{4}$ (par exemple car $8 \leqslant 9$, donc $2\sqrt{2} \leqslant 3$).
Cela donne $\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant 1$ et donc $|z_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{8}$.

16. $|z_n| = |z_n - \alpha| + |\alpha| \leqslant \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ donc $(|z_n|)$ est bornée et on a bien $\boxed{c \in B}$.

Problème 2

1. Soient A,B deux parties de E et $x \in E$.
   (a) Par définition de $A \star B$, on a :
   $$x \in A \star B \Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \Leftrightarrow x \in \overline{A} \text{ ou } x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$$
   Donc :
   $$\boxed{A \star B = \overline{A} \cup \overline{B}}$$
   (b) D'après la question précédente et les lois de De Morgan, on a directement :
   $$\boxed{A \star B = \overline{A \cap B}}$$
2. Soit A une partie de E. D'après ce qui précède, on a directement :
   $$A \star A = \overline{A} \cup \overline{A} \qquad A \star E = \overline{A} \cup \overline{E} = \overline{A} \cup \emptyset \qquad A \star \emptyset = \overline{A} \cup \overline{\emptyset} = \overline{A} \cup E$$
   $$\boxed{A \star A = \overline{A}} \qquad \boxed{A \star E = \overline{A}} \qquad \boxed{A \star \emptyset = E}$$
3. (a) Soient A,B deux parties de E. D'après les questions 2 et 1a, on a :
   $$\boxed{(A \star A) \star (B \star B) = \overline{A} \star \overline{B} = A \cup B}$$
   (b) D'après les questions 2 et 1b, on a de même :
   $$\boxed{(A \star B) \star (A \star B) = \overline{A \star B} = A \cap B}$$
4. Soient A,B,C trois parties de E.
   (a) D'après la question 1b et les lois de De Morgan :
   $$\begin{aligned}(A \cup B) \star C &= \overline{(A \cup B) \cap C}\\ &= \overline{(A \cap C) \cup (B \cap C)}\\ &= \overline{A \cap C} \cap \overline{B \cap C}\end{aligned}$$
   $$\boxed{(A \cup B) \star C = (A \star C) \cap (B \star C)}$$
   (b) De même :
   $$\begin{aligned}(A \cap B) \star C &= \overline{A \cap B \cap C}\\ &= \overline{(A \cap C) \cap (B \cap C)}\\ &= \overline{A \cap C} \cup \overline{B \cap C}\end{aligned}$$
   $$\boxed{(A \cap B) \star C = (A \star C) \cup (B \star C)}$$

(c) D'après la question 1.2 et les lois de De Morgan, on a directement :

$$(A \star B) \star C = \overline{\overline{A \cap B} \cap C}$$

$$\boxed{(A \star B) \star C = (A \cap B) \cup \overline{C}}$$

(d) D'après la question précédente, on a :

$$A \star (B \star C) = (B \star C) \star A = (B \cap C) \cup \overline{A}.$$

Par exemple pour $A = B = \emptyset$ et $C = E$, on a :

$$(A \star B) \star C = (A \cap B) \cup \overline{C} = (\emptyset \cap \emptyset) \cup \emptyset = \emptyset$$
$$A \star (B \star C) = (B \cap C) \cup \overline{A} = (\emptyset \cap E) \cup E = E.$$

Donc :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } E \text{ est non vide, l'égalité } (A \star B) \star C = A \star (B \star C) \\ \text{n'est pas vérifiée pour toutes les parties } A,B,C \text{ de } E.\end{array}}$$

5. Soient A,B,C,D quatre parties de E. D'après les questions 1a et 1b :

$$(A \cap B) \star (C \cap D) = \overline{A \cap B} \cup \overline{C \cap D} \qquad \boxed{(A \cap B) \star (C \cap D) = (A \star B) \cup (C \star D)}$$

Problème 3

Dans tout le problème, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite réelle bornée.

Préliminaire

Les parties A et B sont non vides, majorées et incluses dans $\mathbb{R}$, d'après la propriété de la borne supérieure $\sup(A)$ et $\sup(B)$ existent. Par définition de la borne supérieure, on a :

$$\forall b \in B,\ b \leq \sup(B)$$

Comme $A \subset B$, on a en particulier :

$$\forall a \in A,\ a \leq \sup(B)$$

Par passage à la borne supérieure, on obtient bien : $\sup(A) \leq \sup(B)$.

$$\boxed{\text{si } A \subset B \text{ alors } \sup(A) \leq \sup(B)}$$

B Définition

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   - $E_n \subset \mathbb{R}$
   - E_n est non vide car $u_n \in E_n$ par définition de E_n
   - E_n est majoré et minoré car (u_n) est bornée

   D'après les propriétés de la borne inférieure et de la borne supérieure, cela suffit à affirmer que E_n possède une borne supérieure et une borne inférieure.

$$\boxed{\sup(E_n) \text{ et } \inf(E_n) \text{ existent}}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a clairement $E_{n+1} \subset E_n$. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $(k \geq n+1) \Rightarrow (k \geq n)$. D'après la question préliminaire, qui s'applique car pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est non vide et majoré, on a $\sup(E_{n+1}) \leq \sup(E_n)$. C'est-à-dire $s_{n+1} \leq s_n$.

$$\boxed{(s_n) \text{ est décroissante}}$$

En utilisant la même démarche que dans la question préliminaire, on démontre que si $A \subset B$ avec A et B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides et minorées alors $\inf(A) \geq \inf(B)$. Dans notre contexte, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $i_{n+1} \geq i_n$.

$$\boxed{(i_n) \text{ est croissante}}$$

(c) Par hypothèse, la suite (u_n) est bornée, ainsi il existe $(m,M) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n \leq M$.

D'autre part, par définition de la borne supérieure, pour tout $n \in \mathbb{N}$, s_n est un majorant de E_n, c'est-à-dire que :

$$\forall k \geq n,\ u_k \leq s_n$$

En particulier la suite (s_n) est minorée par m. La suite (s_n) est décroissante et minorée par m, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge.

De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, i_n est un minorant de E_n donc :

$$\forall k \geq n,\ M \geq u_k \geq i_n$$

La suite (i_n) est croissante et majorée par M, elle converge.

$$\boxed{(s_n) \text{ et } (i_n) \text{ convergent}}$$

2. (a) Si la suite (u_n) est constante égale à 0 alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $E_n = \{0\}$ et $s_n = i_n = 0$. Dans ce cas $L_s = L_i = 0$.

$$\boxed{L_s = L_i = 0}$$

(b) Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $E_n = \{-1, 1\}$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = 1$ et $i_n = -1$ ainsi :

$$\boxed{L_s = 1 \text{ et } L_i = -1}$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $E_n = \left\{\dfrac{1}{k+1},\ k \geq n\right\}$. On a :

- La borne supérieure de E_n vaut $\dfrac{1}{n+1}$ car c'est le maximum de E_n.
- La borne inférieure de E_n vaut 0. En effet :
  - ▶ 0 est un minorant de E_n
  - ▶ Pour tout $\varepsilon > 0$, $0 + \varepsilon$ n'est plus un minorant car d'après la définition de la limite :

$$\exists N \geq n,\ \frac{1}{N+1} < \varepsilon$$

Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = \dfrac{1}{n+1}$ et $i_n = 0$, on en déduit que :

$$\boxed{L_s = L_i = 0}$$

C Lien avec la convergence

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la borne supérieure de E_n est en particulier un majorant de E_n et la borne inférieure de E_n est un minorant de E_n. Ainsi :

$$\forall k \geq n,\ i_n \leq u_k \leq s_n$$

En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ i_n \leq u_n \leq s_n$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} i_n = \lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ car $L_i = L_s$, d'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L_i$.

$$\boxed{(u_n) \text{ converge}}$$

4. En reprenant la démarche de la question précédente, on a :

$$\forall k \geq n,\ i_n \leq u_k \leq s_n$$

En particulier, si on appelle $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'extractrice (telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$ pour tout n), pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(n) \geq n$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ i_n \leq u_{\varphi(n)} \leq s_n$$

On passe à la limite quand n tend vers $+\infty$ et on obtient :

$$\boxed{L_i \leq \lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} \leq L_s}$$

5. Soit $\varepsilon > 0$, par définition de la limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - l| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire : $l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon$.
Par passage à la borne supérieure et à la borne inférieure, il vient :

$$\forall n \geq n_0,\ l - \varepsilon \leq i_n \leq s_n \leq l + \varepsilon$$

On a démontré que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ |i_n - l| \leq \varepsilon \text{ et } |s_n - l| \leq \varepsilon$$

C'est-à-dire que (i_n) tend vers l et (s_n) tend vers l, par unicité de la limite :

$$\boxed{L_i = L_s = l}$$

6. On va construire l'extractrice φ par récurrence forte.

- On pose $\varphi(0) = 0$.

• Fixons $n \in \mathbb{N}^*$, supposons avoir défini $\varphi(k)$ pour $k \in [\![0,n-1]\!]$. On considère $E_{\varphi(n-1)+1} = \{u_k,\ k \geq \varphi(n-1)+1\}$, par définition de la borne supérieure de cet ensemble, il existe $p \geq \varphi(n-1)+1$ tel que :

$$s_{\varphi(n-1)+1} - \frac{1}{n} \leq u_p \leq s_{\varphi(n-1)+1}$$

ceci puisque $s_{\varphi(n-1)+1} - \dfrac{1}{n}$ n'est pas un majorant de $E_{\varphi(n-1)+1}$ et $s_{\varphi(n-1)+1}$ est un majorant de $E_{\varphi(n-1)+1}$. On pose $\varphi(n) = p$.

Par construction, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ donc φ est strictement croissante. D'autre part, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ s_{\varphi(n-1)+1} - \frac{1}{n} \leq u_{\varphi(n)} \leq s_{\varphi(n-1)+1}$$

Par passage à la limite, d'après le théorème d'encadrement, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = L_s$.

$$\boxed{(u_{\varphi(n)}) \text{ tend vers } L_s}$$

D Un dernier raffinement

7. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a pose $F_n = \{u_{2k},\ 2k \geq n\}$ et $G_n = \{u_{2k+1},\ 2k+1 \geq n\}$. Ces ensembles sont non vides et majorés donc $f_n = \sup(F_n)$ et $g_n = \sup(G_n)$ existent. Montrons que $s_n = \max(f_n,g_n)$ et supposant sans perte de généralité que $f_n \geq g_n$.

   • Pour tout $k \geq n$, on a : $s_n \geq u_k$, en particulier si $2k \geq n$, on a : $s_n \geq u_{2k}$ et si $2k+1 \geq n$ alors $s_n \geq u_{2k+1}$. Par passage à la borne supérieure, on a : $s_n \geq f_n$ et $s_n \geq g_n$ donc $s_n \geq \max(f_n,g_n)$.

   • Il reste à démontrer que $s_n \leq \max(f_n,g_n) = f_n$. Pour tout $k \geq n$, on a :

$$u_k \leq f_n \text{ ou } u_k \leq g_n \leq f_n \text{ selon la parité de } k$$

   Par passage à la borne supérieure, on obtient $s_n \leq f_n$.

   Finalement $s_n = f_n$ et on a démontré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = \max(f_n,g_n)}$$

   On remarque que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\max(a,b) = \frac{1}{2}(|a-b| + a + b)$$

   ce qui se démontre immédiatement par disjonction de cas $a \geq b$ puis $b \geq a$.
   Ici cela donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = \frac{1}{2}(|f_n - g_n| + f_n + g_n)$$

   On passe à la limite quand n tend vers $+\infty$ en utilisant notamment la continuité de la fonction valeur absolue :

$$L_s = \frac{1}{2}\Big(|\limsup_{n\to+\infty} v_n - \limsup_{n\to+\infty} w_n| + \limsup_{n\to+\infty} v_n + \limsup_{n\to+\infty} w_n\Big) = \max\Big\{\limsup_{n\to+\infty} v_n, \limsup_{n\to+\infty} w_n\Big\}$$

On adapte la démarche précédente, en remplaçant borne supérieure par borne inférieure et en remarquant que l'on a :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \min(a,b) = \frac{1}{2}(-|a-b| + a + b)$$

Ce qui démontre le résultat voulu :

$$\boxed{L_s = \max\left\{\limsup_{n\to+\infty} v_n, \limsup_{n\to+\infty} w_n\right\} \text{ et } L_i = \min\left\{\liminf_{n\to+\infty} v_n, \liminf_{n\to+\infty} w_n\right\}}$$