TD B3. Intégration et équations différentielles

1 Primitives

Exercice B3.1

1. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
   (a) Montrer que si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   (b) Que dire de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ si f est impaire ?
2. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique. Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_{a}^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice B3.2 ✲

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer sans utiliser la fonction ln que

$$\int_1^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^{y} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Exercice B3.3

Calculer les intégrales ou déterminer une primitive des fonctions suivantes

1. avec le moins de calcul possible :
   (a) $a : t \mapsto te^{t^2}$,
   (b) $b : t \mapsto \tan t$,
   (c) $C = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{Arccos}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$
   (d) $d : t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$,
2. à l'aide d'intégrations par parties :
   (e) $e : t \mapsto t\ln t$,
   (f) $f : t \mapsto t\operatorname{Arctan} t$,
   (g) $g : t \mapsto \operatorname{Arccos}(2t)$,
   (h) $H = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} te^t$,
   (i) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos(2t)$,
   (j) $j : t \mapsto (t^2+2t)e^t$,
   (k) $K = \displaystyle\int_0^{1} \cos(\pi t)e^t$,
3. à l'aide des changements de variables indiqués :
   (l) $L = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{e^{2t}+1}\,\mathrm{d}t \quad (u = e^t)$,
   (m) $m : t \mapsto \dfrac{\sin t}{1+\cos^2 t} \quad (u = \cos(t))$,
   (n) $n : t \mapsto \sin^3 t \quad (u = \cos(t))$,
   (p) $p : t \mapsto \dfrac{t}{1+t^4} \quad (u = t^2)$,
   (q) $q : t \mapsto \dfrac{1}{1+e^t} \quad (u = e^t)$.

Exercice B3.4 ✲

Calculer les intégrales ou une primitive des fonctions suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x$,
2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x \,\mathrm{d}x$,
3. $f : x \mapsto \sin^4 x$.

Exercice B3.5 ✲

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{-3t+5}}$ à l'aide d'un changement de variable affine.
2. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{5x+4}\,\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{5x+4}$.
3. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\,\mathrm{d}u$ à l'aide du changement de variable $u = \cos(2t)$

Exercice B3.6 ✲

Calculer une primitive des fonctions suivantes.

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2}$,
2. $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+2}$,
3. $h : x \mapsto \dfrac{12x+4}{x^2+1}$,
4. $i : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$,
5. $j : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-5x+6}$,
6. $k : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^8+1}$.

Exercice B3.7 ✲ *(Lemme de Riemann-Lebesgue)*

Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,\mathrm{d}t$.

Exercice B3.8 ✲

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}$.

1. Établir pour tout $n \in \mathbb{N}$ une relation entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_2.

Exercice B3.9 ✲✲

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \displaystyle\int_1^e x(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et en déduire qu'elle converge.
2. Calculer I_0 puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, établir une relation entre I_n et I_{n+1}.
3. Déterminer la limite de (I_n).

Exercice B3.10 ✲✲

Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on définit $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $\forall (p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $I_{p,q} = \dfrac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$.

2. En déduire une expression de $I_{p,q}$ en fonction de p et q.
3. Soit $p, q \in \mathbb{N}$. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{(-1)^k}{p+k+1}$.

Exercice B3.11 ✿✿

Calculer une primitive de $t \mapsto \sin(\ln(t))$ sur un intervalle à préciser

1. à l'aide d'une fonction à valeurs complexes,
2. à l'aide d'une double intégration par parties.

Exercice B3.12 ✿✿

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on définit $I(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\operatorname{Arctan} t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$, calculer $I(x)$.
2. Montrer que I est dérivable sur $]0, +\infty[$, la dériver et retrouver le résultat précédent.
3. Vérifier encore le résultat précédent à l'aide d'un calcul direct d'intégrale.

2 Équations différentielles

Exercice B3.13 ✿

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $e^x y' - xy = 0$,
2. $(1+x^2)y' + 2xy = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$,
3. $\cos(x)y' - \sin(x)y = \tan x$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$,
4. $xy' + 3y = \dfrac{1}{1-x^2}$ sur $]0, 1[$,
5. $y' - 2xy = \operatorname{sh} x - 2x \operatorname{ch} x$.

Exercice B3.14 ✿✿

Résoudre et raccorder le cas échéant.

1. $x(x-4)y' + (x-2)y = 0$,
2. $xy' - 2y = x^4$,
3. $x^2 y' - y = x^2 - x$,
4. $(e^x - 1)y' - (e^x - 1)y = 3 + 2e^x$,
5. $(x-1)y' - 2y = (x-1)^3$.

Exercice B3.15 ✿

Résoudre sur $\mathbb{R}$.

1. $y'' + 2y' + 5y = 5x$,
2. $y'' - 2y' - y = e^x \sin x$,
3. $-2y'' + y' + y = -e^x$,
4. $y'' + 9y = x + 1$.

Exercice B3.16

Résoudre

1. $y'' - y = (3x^2 - 11x + 6)e^{-2x}$;
2. $y'' - 2(1+i)y' + 2iy = x + i$;
3. $y'' - 4y' + 3y = \sin x + \cos x$;
4. $y'' - 2y' + y = (x^2 + 1)e^x$;
5. $y'' - y = x^2 \operatorname{sh} x$.

Exercice B3.17 ✿

Intégrer les systèmes différentiels (où les fonctions inconnues sont $t \mapsto x(t)$ et $t \to y(t)$.

1. $\begin{cases} x'' = x' + y' - y \\ y'' = x' + y' - x \end{cases}$,
2. $\begin{cases} x' = 7x - 5y \\ y' = 10x - 8y \end{cases}$,
3. $\begin{cases} x' - x = y \\ y' + y = 3x \end{cases}$.

Exercice B3.18 ✿✿ Soit l'équation différentielle

$$(x-1)y' + (x-2)y = x(x-1)^2.$$

1. Montrer (sans résoudre l'équation différentielle) que toutes les courbes intégrales passent par un même point. Trouver le lieu des points de ces courbes où la tangente est horizontale.
2. Résoudre l'équation différentielle.

Exercice B3.19 ✿

Soit l'équation (E) : $(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = (1+x)^3 e^x$.

1. Vérifier que $x \mapsto e^x$ est solution de (E_0).
2. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $z : x \mapsto y(x)e^{-x}$ est solution d'une équation (E_1) que l'on déterminera.
3. Résoudre (E_1) et en déduire les solutions de (E).

Exercice B3.20 ✿✿

1. Déterminer toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$f'(x) - f(-x) = e^x.$$

2. Déterminer toutes les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Exercice B3.21 ✿✿✿

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $x^2 y'' + y = 0$ à l'aide du changement de variable $t = \ln(x)$.
2. Déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$