DEVOIR MAISON N° 8

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être $\boxed{\text{encadrés}}$.
La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.
Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Soit $(I_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t.$$

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $I_n \geqslant 0$. Montrer que la suite (I_n) est convergente.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n.$$
4. Montrer que le produit $(n+1)I_nI_{n+1}$ est constant.
5. (a) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ *(on pourra commencer par encadrer I_{n+1}^2 pour tout n).*
   (b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$.
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}I_n$ *(on pourra penser à comparer trois termes successifs de la suite).*
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer I_{2n} et I_{2n+1} sous forme de produits puis à l'aide de factorielles.

Problème 2

Apéritif

On considère l'équation différentielle (A) suivante, d'inconnue $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

$$xy' - y = \ln x \qquad (A)$$

1. Résoudre l'équation (A).
2. Justifier qu'il existe une unique solution f de (A) telle que $f(1) = 0$ et la déterminer.

Une équation d'Euler

On considère l'équation différentielle (E), dont l'inconnue est $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

$$x^2y'' - xy' + y = 1 - \ln x \qquad (E)$$

On note (E_0) l'équation homogène associée

$$x^2y'' - xy' + y = 0 \qquad (E_0)$$

et on appelle $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0).

3. Déterminer un nombre $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \mapsto x^n$ soit solution de (E_0).
4. Soient y et z deux fonctions $]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que $y(x) = xz(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que y est solution de (E_0) si et seulement si z est solution de l'équation (E_1) :
$$xz'' + z' = 0. \tag{E_1}$$
5. Résoudre l'équation (E_1).
6. En déduire l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation (E_0).
7. (a) Déterminer $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $x \mapsto a + b\ln x$ soit solution de (E).
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de (E).
8. Montrer que la fonction f de la question 2 est l'unique solution de (E) qui vérifie $f(1) = f'(1) = 0$.

Problème 3

Les trois parties centrales de ce problème présentent trois méthodes différentes pour effectuer le même calcul de la fonction g définie ci-dessous. Il est donc formellement interdit d'utiliser un résultat d'une de ces parties pour traiter une des deux autres.

On définit la fonction g par
$$g : x \mapsto \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(t+1)^2(t^2+1)}\mathrm{d}t.$$

Hors d'œuvre

On pose $f(t) = \dfrac{1}{(t+1)^2(t^2+1)}$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Justifier que g est bien définie pour $x > 0$. Dans toute la suite, x désigne un réel strictement positif.
3. Calculer $g(1)$.
4. Comparer les valeurs de $g(x)$ et $g\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Entrée : cromesquis de théorème fondamental

On note F une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Montrer que $g(x) = F(x) - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, exprimer $g'(x)$ à l'aide de f. En déduire une expression de $g(x)$.

Plat de résistance : rôti de changement de variable

7. En effectuant le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$ dans l'intégrale définissant $g(x)$, déterminer une autre expression de $g(x)$.
8. En combinant astucieusement ces deux expressions de $g(x)$, retrouver le résultat de la partie précédente.

Dessert : tarte à la crème

9. Déterminer une expression de f sous la forme

$$f(t) = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{(t+1)^2} + \frac{ct+d}{t^2+1}$$

puis une primitive de f.

10. En déduire l'expression de $g(x)$.

Café et digestif

11. Soit $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Calculer

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{\cos^2\theta}{1+\sin(2\theta)} \mathrm{d}\theta$$

(indication : oui, il y a un lien avec ce qui précède !)