Problème 1

Dans tout le problème, E désigne un ensemble non vide.

Pour toute partie $A \subset E$, on appelle **fonction indicatrice** de A l'application $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\}$ définie par

$$\forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Notation. Dans toute la suite, on note $\overline{A}$ le complémentaire d'une partie A de E.

A Propriété des fonctions indicatrices

1. $\forall x \in E, \mathbb{1}_E(x) = 1$ car $x \in E$ justement.
   Donc $\boxed{\mathbb{1}_E \text{ est la fonction constante égale à } 1}$.
   $\forall x \in E, \mathbb{1}_\emptyset(x) = 0$ car $x \notin \emptyset$.
   Donc $\boxed{\mathbb{1}_\emptyset \text{ est la fonction constante égale à } 0}$.

2. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $A \subset B$. Soit $x \in E$.
   - si $x \in A$, alors $x \in B$ et alors $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x) = 1$, donc $\mathbb{1}_A(x) \leqslant \mathbb{1}_B(x)$.
   - si $x \notin A$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 0$ et comme $\mathbb{1}_B(x) = 0$ ou 1, on a alors $\mathbb{1}_A(x) \leqslant \mathbb{1}_B(x)$.

   On a montré que dans tous les cas, $\boxed{\mathbb{1}_A(x) \leqslant \mathbb{1}_B(x)}$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) \leqslant \mathbb{1}_B(x)$.
   Soit $x \in A$. Alors $\mathbb{1}_A(x) = 1$. Comme $\mathbb{1}_B(x) \geqslant \mathbb{1}_A(x)$, $\mathbb{1}_B(x) = 1$ et donc $x \in B$.
   On a montré que $\boxed{A \subset B}$.

3. $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ et $B \subset A \Leftrightarrow \forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) \leqslant \mathbb{1}_B(x)$ et $\mathbb{1}_B(x) \leqslant \mathbb{1}_A(x) \Leftrightarrow \forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x)$ $\Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

4. Soit $x \in E$. $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \cap B \\ 0 \text{ si } x \notin A \cap B \end{cases}$.
   - si $x \in A \cap B$, $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x) = 1$ et alors $\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 1$.
   - si $x \notin A\cap B$, alors $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, donc $\mathbb{1}_A(x) = 0$ ou $\mathbb{1}_B(x) = 0$. Dans les deux cas, $\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 0$.

   Ceci montre que pour tout $x \in E$, $\mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x) \times \mathbb{1}_B(x)$, soit $\boxed{\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B}$.

5. $\forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \in \overline{A} \end{cases}$ et $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \overline{A} \\ 0 \text{ si } x \in \overline{\overline{A}} = A \end{cases}$. Comme $0 = 1 - 1$ et $1 = 1 - 0$ on lit que $\boxed{\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A}$.

   Comme $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$, $\forall x \in E,\ \mathbb{1}_A^2(x) = \mathbb{1}_A(x)$ donc $\boxed{\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A}$.

6. $\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_{A\cap\overline{B}} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_{\overline{B}} = \boxed{\mathbb{1}_A \times (1 - \mathbb{1}_B)}$.

7. Soit $x \in E$.
   - Si $x \in A$, alors $x \in A \cup B$, d'où $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1$, et $x \notin B$, d'où $\mathbb{1}_B(x) = 0$. Avec aussi $\mathbb{1}_A(x) = 1$, on a bien $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x)$.

- Si $x \in B$, même raisonnement en échangeant les rôles de A et B.
- Sinon, $x \in \overline{A \cup B}$, et alors $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 0$, ainsi que $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x) = 0$ et on a bien encore $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x)$.

Finalement, $\boxed{\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B}$.

8. On utilise les questions précédentes avec $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ (union disjointe).
$\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_{A\setminus B} + \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A \times (1 - \mathbb{1}_B) + \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$.

9.

10. $A\Delta\emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A \cup \emptyset = \boxed{A}$.
$A\Delta E = (A \setminus E) \cup (E \setminus A) = \emptyset \cup \overline{A} = \boxed{\overline{A}}$.
$A\Delta A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset \cup \emptyset = \boxed{\emptyset}$.

11. $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_{A\setminus B} + \mathbb{1}_{B\setminus A}$ car $A \setminus B$ et $B \setminus A$ sont disjoints.
Donc $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A(1 - \mathbb{1}_B) + \mathbb{1}_B(1 - \mathbb{1}_A) = \boxed{\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B}$.

12. (a)
$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{(A\cup B)\setminus(A\cap B)} &= \mathbb{1}_{A\cup B} \times (1 - \mathbb{1}_{A\cap B}) \\
&= (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}) \times (1 - \mathbb{1}_{A\cap B}) \\
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B} - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{A\cap B} - \mathbb{1}_B\mathbb{1}_{A\cap B} + \mathbb{1}_{A\cap B}^2 \\
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B} - \mathbb{1}_{A\cap A\cap B} - \mathbb{1}_{B\cap A\cap B} + \mathbb{1}_{A\cap B} \\
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B} - \mathbb{1}_{A\cap B} - \mathbb{1}_{A\cap B} + \mathbb{1}_{A\cap B} \\
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B \\
&= \mathbb{1}_{A\Delta B}
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)} &= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{B\Delta C} - 2\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_{B\Delta C} \\
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A(\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C) \\
&= \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_B \times \mathbb{1}_C - 2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B - 2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C + 4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C.
\end{aligned}$$

On peut calculer $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C}$ de manière analogue et comparer, ou bien remarquer que cette formule est symétrique en A, B et C, donc elle vaut aussi $\mathbb{1}_{(B\Delta C)\Delta A}$. On conclut alors par la propriété de commutativité que $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} = \mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)}$.