TD D1. Systèmes linéaires

Exercice D1.1

Résoudre les systèmes linéaires suivants.

1. $\begin{cases} x+2y=5 \\ x-y=-1 \end{cases}$,

2. $\begin{cases} (2-i)x+(3+i)y=1+2i \\ (3+2i)x+(1+5i)y=-2+3i \end{cases}$,

3. $\begin{cases} x-y+z=0 \\ 3x+2y+z=1 \\ x+y-2z=-1 \end{cases}$,

4. $\begin{cases} 2x-y+2z=2 \\ x+y+z=1 \\ x+z=1 \end{cases}$,

5. $\begin{cases} x-y=0 \\ 3x-3y+2z=2 \\ -x+y+4z=4 \end{cases}$,

6. $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x+y=1 \\ x+2y=-1 \end{cases}$,

7. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x-3y+2z=4 \end{cases}$,

8. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+3y+3z=3 \end{cases}$.

Exercice D1.2

Résoudre les systèmes linéaires suivants.

1. $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ 2x+5y-3z=1 \\ 3x+6y-z=1 \\ 4x+7y+z=1 \end{cases}$,

2. $\begin{cases} x+3y+2z+t=-2 \\ 2x+7y+3z=-5 \\ 3x+8y+7z+11t=13 \\ -2x-8y-2z+6t=18 \end{cases}$,

3. $\begin{cases} x+y-z-s+t=0 \\ 2x+y-4z+4t=0 \\ x+2y-3z+s-t=0 \end{cases}$.

Exercice D1.3

Résoudre les systèmes suivants, en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

1. $\begin{cases} x+y=a \\ -x+ay=1 \end{cases}$,

2. $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+ay+z=2 \\ 2x+2y+3z=3 \end{cases}$,

3. $\begin{cases} x+2y-3z=1 \\ x+3y-4z=2 \\ 2x+3y-5z=a \end{cases}$,

4. $\begin{cases} 2x+y-3z=1 \\ x+3y-2z=2 \\ 7x-4y-a^2z=a-4 \end{cases}$,

5. $\begin{cases} x+ay+2z=a \\ -2x+y+(a-2)z=1 \\ ax+y+2z=2a-1 \end{cases}$,

6. $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=1 \\ x+y+z=a \end{cases}$.

Exercice D1.4

1. Résoudre, en fonction de $a \in \mathbb{C}$, le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & a^2z & = & 0 \\ \overline{a}x & + & y & + & az & = & 0 \\ \overline{a}^2x & + & \overline{a}y & + & z & = & 0 \end{array}\right. .$$

2. Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. En exploitant la relation $1 + j + j^2 = 0$, résoudre

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & a \\ x & + & jy & + & j^2 z & = & b \\ x & + & j^2 y & + & jz & = & c \end{array}\right. .$$

Exercice D1.5 ✿✿

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. Lorsque a, b, c, d sont deux à deux distincts, résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ ax & + & by & + & cz & = & d \\ a^2 x & + & b^2 y & + & c^2 z & = & d^2 \end{array}\right. .$$

2. Que dire de ce système dans les autres cas ?

Exercice D1.6

Déterminer le rang des matrices suivantes.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,
3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice D1.7 ✿

Déterminer en fonction des paramètres le rang des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ -1 & 2-a & 1 \\ 2 & 0 & 3-a \end{pmatrix}$,
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$,
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.

Exercice D1.8 ✿✿

Soit $n \geqslant 2$ un entier et $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Résoudre le système

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2b_1 \\ x_2 + x_3 = 2b_2 \\ \quad \vdots \\ x_{n-1} + x_n = 2b_{n-1} \\ x_1 + x_n = 2b_n \end{cases} .$$