Chapitre D1

Systèmes linéaires

Objectifs

- Résoudre un système linéaire dans toutes les configurations.
- Appréhender la notion de matrice associée à un système.
- Mettre en place un algorithme de réduction d'une matrice et de résolution du système associé.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Définitions

Définition D1.1

On appelle **système d'équations linéaires** un système du type

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

- Pour tous $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, les scalaires a_{ij} sont les **coefficients** du système.
- Les scalaires b_i pour $i \in [\![1,n]\!]$ forment le **second membre**. Lorsque tous les b_i sont nuls, on parle de **système homogène**
- Les x_j pour $j \in [\![1,p]\!]$ sont les **inconnues** du système.

Définition D1.2

Avec les notations ci-dessus, on appelle **solution** du système (S) tout p-uplet $(x_1,\dots,x_p)$ telles que toutes les équations de (S) soient vérifiées.

- Un système admettant au moins une solution est dit **compatible**.
- Un système n'admettant aucune solution est dit **incompatible**.

2 Matrices

Définition D1.3

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes une application

$$A : \begin{array}{rcl} [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \to & \mathbb{K} \\ (i,j) & \mapsto & a_{i,j} \end{array}.$$

Remarque. Il s'agit simplement d'une famille de nombre indexée par deux indices
Notations. Une matrice se note

$$\begin{array}{cc} & \text{colonne } j \\ \text{ligne } i & \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & a_{i,j} & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

On dit qu'elle est de taille $n \times p$ ou (n,p).
Le coefficient en place (i,j) se note $a_{i,j}$ ou $[A]_{i,j}$.
On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Notations. Le système d'équations défini dans le premier paragraphe peut être représenté par la matrice $A = [a_{i,j}]_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$, appelée **matrice des coefficients** ou **matrice du système**. Le second membre se note comme la matrice colonne $B = [b_i]_{i\in[\![1,n]\!]}$. On note alors le système complet de la manière suivante, appelée **matrice augmentée** du système.

$$(S) \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$$

3 Résolution d'un système

Définition et proposition D1.4

Étant donnés $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on appelle **opération élémentaire** sur les lignes d'un système linéaire (ou de sa matrice augmentée) une des opérations suivantes :

- **transvection** (addition d'une ligne à une autre ligne) : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$,
- **dilatation** (multiplication d'une ligne par un scalaire) : $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$,
- **transposition** (échange de deux lignes) : $L_i \leftrightarrow L_j$.

Définition D1.5

(i) Deux systèmes linéaires sont dites **équivalents** par lignes lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires.

(ii) Deux matrices sont dites **équivalentes** par lignes lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires.

Proposition D1.6

Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. L'équivalence par lignes est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition D1.7

Un système ou une matrice est dite **échelonnée** lorsqu'elle vérifie les deux propriétés suivantes.

(i) Si une ligne est nulle, alors toutes les suivantes le sont aussi.

(ii) À partir de la deuxième ligne non nulle, le premier coefficient non nul est situé plus à droite que celui de la ligne précédente.

Ces coefficients ainsi que le premier de la première ligne, sont appelés les **pivots** du système ou de la matrice.

Théorème D1.8 (Gauß)

Toute matrice est équivalente par lignes à une matrice échelonnée.

Remarque. La démonstration de ce théorème est constructive et fournit un algorithme pour réaliser cette opération en pratique, également connu sous le nom d'algorithme de Gauß. Si l'on excepte le cas particulier où la première colonne est nul, le principe de cet algorithme est le suivant.

- Permuter les lignes de manière à obtenir un coefficient supérieur gauche (**pivot**) $a_{1,1}$ non nul.
- Pour tout $j \geqslant 2$ on annule le premier coefficient $a_{j,1}$ de la ligne L_j en effectuant

$$L_j \leftarrow L_j - \frac{a_{j,1}}{a_{1,1}} L_1$$

Pour la suite, on ne modifie plus L_1 et on réitère ces opérations avec le système formé par toutes les autres lignes (qui a également une colonne de moins). Enfin le processus s'arrête lorsqu'on a obtenu un système échelonné.

Définition D1.9

On appelle **rang** d'un système ou d'une matrice le nombre de ses pivots.

Remarque. Pour un système $n \times p$ compatible de rang r, on peut déterminer r **inconnues principales**, associées aux pivots, et les $p - r$ autres, les **inconnues secondaires**. Chaque choix de valeurs fixées pour ces dernières détermine une unique solution.

Définition D1.10

(i) Un système $p \times p$ de rang p échelonné est appelé **triangulaire**. Il en est de même pour sa matrice.

(ii) Un système équivalent à un système triangulaire est dit **de Cramer**.

Proposition D1.11

Un système de Cramer admet une unique solution.

Méthodes

- Résolution de systèmes linéaires et expression des solutions par pivot de Gauß.
- Réduction d'une matrice à une matrice échelonnée équivalente, détermination du rang.