

# TD C2. Structures algébriques

## 1 Groupes

### Exercice C2.1

Soit  $H_1$  et  $H_2$  deux sous-groupes d'un groupe  $(G, \times)$ . Montrer que  $H_1 \cup H_2$  est un sous-groupe de  $G$  si et seulement si  $H_1 \subset H_2$  ou  $H_2 \subset H_1$ .

### Exercice C2.2

Étant donné un groupe  $(G, \star)$ , on définit le centre de  $G$  comme

$$Z(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G, x \star y = y \star x\}.$$

1. Montrer que  $Z(G)$  est un sous groupe de  $(G, \star)$ .
2. Déterminer le centre du groupe  $(G, \star)$  défini par

$$G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall (x, y), (x', y') \in G, (x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + y).$$

### Exercice C2.3

Soit  $(G, \times)$  un groupe dont on note  $e$  l'élément neutre.

1. On suppose que  $G$  contient exactement deux éléments :  $e$  et  $a \neq e$ .
  - (a) Montrer que  $a^2 = e$ .
  - (b) En déduire que deux groupes à 2 éléments sont nécessairement isomorphes.
2. On suppose que  $G$  contient exactement 3 éléments.
  - (a) Déterminer la table de la loi  $\times$ .
  - (b) En déduire que deux groupes à 3 éléments sont nécessairement isomorphes.
3. Montrer que les groupes  $\mathbb{U}_4$  et  $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2$  ne sont pas isomorphes.

### Exercice C2.4

Soit  $(G, \cdot)$  un groupe. Pour tout  $g \in G$ , on définit  $\varphi_g : \begin{array}{l} G \rightarrow G \\ x \mapsto gxx^{-1} \end{array}$ .

1. Montrer que  $\varphi_g$  est un automorphisme de  $G$ .
2. Montrer que  $f : g \mapsto \varphi_g$  est un morphisme de groupes de  $(G, \star)$  dans  $(\text{Aut}(G), \circ)$ .
3. Montrer que  $\text{Ker } \varphi$  est le centre de  $G$  (voir un exercice précédent).

### Exercice C2.5

Montrer que  $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{U}_6 \rightarrow \mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_3 \\ z \mapsto (z^3, z^2) \end{array}$  est un isomorphisme de groupes.

### Exercice C2.6 (Théorème de Lagrange)

Soit  $(G, \times)$  un groupe fini à  $n$  éléments et  $H$  un sous-groupe à  $m$  éléments de  $G$ . Le théorème de Lagrange stipule que nécessairement  $m$  divise  $n$ .

On définit sur  $G$  la relation binaire  $\sim$  par

$$\forall x, y \in G, x \sim y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H.$$

1. Montrer que  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $G$ .




2. Soit  $g \in G$ . On note  $\text{cl}(g)$  sa classe d'équivalence. Montrer que  $f : H \rightarrow \text{cl}(g)$  est bien définie et
- $$h \mapsto hg$$
- bijective.
3. En déduire le théorème de Lagrange.

**Exercice C2.7** 

Soit  $(G, \star)$  un groupe fini.

1. Soit  $a \in G$ . Montrer que  $t : G \rightarrow G$  est un automorphisme de  $G$ .  

$$g \mapsto a \star g$$
2. Soit  $f : (G, \star) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$  un morphisme de groupes non constant. Calculer  $\sum_{g \in G} f(g)$ .
3. Que dire si  $f$  est constant ?

**Exercice C2.8**  (sous-groupes additifs de  $\mathbb{R}$ )


Soit  $G$  un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  non réduit à  $\{0\}$ .

1. Justifier l'existence de  $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$ .
2. Si  $\alpha > 0$ , montrer que  $G = \alpha\mathbb{Z}$ .
3. Si  $\alpha = 0$ , montrer que  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice C2.9** 


Montrer que chacune des applications suivantes est un morphisme de groupes, puis déterminer son noyau et son image.

1.  $n \mapsto (-1)^n$ , définie sur  $\mathbb{Z}$ ,
2.  $z \mapsto \frac{z}{|z|}$ , définie sur  $\mathbb{C}^*$ ,
3.  $(r, u) \mapsto ru$ , définie sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}$ .

**Exercice C2.10** 

Montrer que si deux groupes  $G$  et  $G'$  sont isomorphes, alors  $\text{Aut}(G)$  et  $\text{Aut}(G')$  sont isomorphes.

## 2 Anneaux, corps

**Exercice C2.11** 

Soit  $E$  un ensemble. On rappelle la définition de la différence symétrique de deux parties de  $E$  :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Montrer que  $(\mathcal{P}(E), \Delta)$  est un groupe dont tout élément est son propre symétrique.
2. Montrer que  $(\mathcal{P}(E), \Delta \cap)$  est un anneau commutatif.
3. Montrer que  $(\mathcal{P}(E), \Delta \cap)$  n'est pas intègre si  $E$  contient au moins deux éléments.

**Exercice C2.12**  (Anneau des entiers de Gauß)

Soit  $A = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ .

1. Montrer que  $A$  est un sous-anneau de  $\mathbb{C}$ .
2. Montrer que tout élément inversible de  $A$  est de module 1.

3. En déduire le groupe des inversibles de  $A$ .

**Exercice C2.13** 

Soit  $A$  un anneau intègre. Étant donnés  $a, b \in A$ , on dit que  $a$  **divise**  $b$  (et on note  $a|b$ ) lorsque  $\exists k \in A, b = ak$ .

Soit  $a, b \in A$ . Montrer que

$$a|b \text{ et } b|a \iff \exists u \in U(A), b = au.$$

**Exercice C2.14** 

Soit  $(A, +, \times)$  un anneau et  $a, b \in A$ .

1. Montrer que si  $ab$  est nilpotent, alors  $ba$  est nilpotent.
2. On suppose que  $a$  et  $b$  commutent.
  - (a) Montrer que si  $a$  est nilpotent, alors  $ab$  est nilpotent.
  - (b) Montrer que si  $a$  et  $b$  sont nilpotents, alors  $a + b$  est nilpotent.

**Exercice C2.15** 

On définit  $K = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ . Montrer que  $K$  est un corps.