Problème 1

Soit $(I_n)_n$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\mathrm{d}t.$$

1. $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\mathrm{d}t = \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

   $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{1}$.

   Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\sin^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$.

   Cela permet de calculer $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{2}\mathrm{d}t - \dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)\mathrm{d}t = \boxed{\frac{\pi}{4}}$.

2. Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$. Donc $0 \leqslant \sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t)$. Par croissance de l'intégrale, on a donc $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$, ce qui montre que $\boxed{(I_n) \text{ est une suite décroissante de termes positifs ou nuls}}$.

   La suite (I_n) étant décroissante et minorée (par 0), $\boxed{\text{elle est convergente}}$.

3. Soit $n \geqslant 2$. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}(t)\sin(t)\mathrm{d}t$.

   On intègre par parties en posant $\begin{cases} u(t) = \sin^{n-1}(t) \\ v'(t) = \sin(t) \end{cases}$. Alors $\begin{cases} u'(t) = (n-1)\cos(t)\sin^{n-2}(t) \\ v(t) = -\cos(t) \end{cases}$.

   $I_n = \left[-\cos(t)\sin^{n-1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin^{n-2}(t) = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(t))\sin^{n-2}(t)$.

   Ainsi $I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$. Et donc $\boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$.

4. La relation précédente s'écrit pour $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

   Alors $I_{n+2}I_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n I_{n+1}$, *i.e.* $(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_n I_{n+1}$.

   Cela montre que $\boxed{((n+1)I_n I_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante}}$, égale à $I_0 I_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

5. (a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$, donc $0 \leqslant (n+1)I_{n+1}I_{n+1} \leqslant (n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{4}$.

   Ainsi $0 \leqslant I_{n+1}^2 \leqslant \dfrac{\pi}{4(n+1)}$, soit $0 \leqslant |I_n| \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$. Par encadrement, $\boxed{I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$ donc, comme $I_n \neq 0$, $\dfrac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$, soit, d'après 3, $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$. Or $\dfrac{n+1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc par encadrement, $\boxed{\frac{I_{n+1}}{I_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$.

   (c) Sur le même principe, pour tout $n \geqslant 1$, $I_{n+1} \geqslant I_n \geqslant I_{n-1}$ donne : $nI_nI_{n+1} \geqslant nI_nI_n \geqslant nI_nI_{n-1}$, ou encore $\dfrac{n}{n+1}(n+1)I_nI_{n+1} \geqslant nI_nI_n \geqslant nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{4}$. Par encadrement, on obtient $nI_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{4}$, d'où $\boxed{\sqrt{n}I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

6. D'après 3, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\begin{array}{l} I_{2n} = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}\right) I_0 \\ I_{2n+1} = \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}\right) I_1 \end{array}$, soit $\boxed{\begin{array}{l} I_{2n} = \dfrac{\pi}{2} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \\ I_{2n+1} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} \end{array}}$.

Problème 2

Apéritif

On considère l'équation différentielle (A) suivante, d'inconnue $y :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$.

$$xy' - y = \ln x \tag{A}$$

1. Sur $]0,+\infty[$, on peut mettre l'équation sous forme normalisée :

$$y' - \frac{1}{x} y = \frac{\ln x}{x}.$$

   $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
   Les solutions de l'équation homogène associée sont $\{x \mapsto \lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
   On cherche une solution particulière de la forme $f_p : x \mapsto C(x) \cdot x$ avec C dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On dérive, on remplace et on trouve que f_P est solution de l'équation différentielle si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $C'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$. Une intégration par parties permet de poser $C : x \mapsto -\dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{1}{x}$, d'où $f_P : x \mapsto -\ln(x) - 1$.
   Finalement les solutions de (A) sont $\boxed{\{x \mapsto \lambda x - \ln(x) - 1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}}$.
2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous garantit l'existence et l'unicité d'une solution à ce problème. Le calcul confirme et nous fournit la solution $\boxed{\{x \mapsto x - \ln(x) - 1\}}$.

Une équation d'Euler

On considère l'équation différentielle (E), dont l'inconnue est $y :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$.

$$x^2 y'' - xy' + y = 1 - \ln x \tag{E}$$

On note (E_0) l'équation homogène associée

$$x^2 y'' - xy' + y = 0 \tag{E_0}$$

et on appelle $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0).

3. $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$ ne sont pas solutions de (E_0).
   Soit $n \geqslant 2$ un entier. Alors $x \mapsto x^n$ est deux fois dérivable et est solution de (E_0) si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}$, $n(n-1)x^n - nx^n + x^n = 0$, *i.e.* $(n-1)(n-2)x^n = 0$, *i.e.* $n = 2$.
   Ainsi $\boxed{x \mapsto x^2 \text{ est solution de } (E_0)}$.
4. Soit y et z deux fonctions $]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que $y(x) = xz(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   On a déjà y dérivable 2 fois si et seulement si z est dérivable 2 fois (sur $\mathbb{R}_+^*$ pour le quotient $z(x) = \dfrac{y(x)}{x}$.

Et on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, y'(x) = xz'(x) + z(x)$ et $y''(x) = xz''(x) + 2z'(x)$.
Puis

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E_0) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^3 z''(x) + 2x^2 z'(x) - x^2 z'(x) - xz(x) + xz(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^3 z''(x) + x^2 z'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, xz''(x) + z'(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{z \text{ est solution de l'équation } (E_1)} : \end{aligned}$$

$$xz'' + z' = 0. \tag{E_1}$$

5. En posant $u = z'$, z est solution de (E_1) si et seulement si u est solution de : $xu' + u = 0$, *i.e.* $z' \in \left\{x \mapsto \dfrac{\lambda}{x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$.
   En primitivant, on obtient les solutions $\boxed{\{z : x \mapsto \lambda \ln(x) + \mu \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}}$.
6. Ainsi $\boxed{\mathcal{S}_0 = \{y : x \mapsto \lambda x \ln(x) + \mu x \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}}$.
7. (a) $\boxed{x \mapsto -1 - \ln x \text{ est solution de } (E)}$.
   (b) Les solutions de (E) sont donc (d'après leur structure affine) :
   $$\boxed{\{x \mapsto \lambda x \ln(x) + \mu x - \ln(x) - 1 \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}}.$$
8. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nous garantit l'existence et l'unicité d'une solution ; il suffit de vérifier que $x \mapsto x - \ln(x) - 1$ convient.
   Sans utiliser ce théorème, on cherche λ et μ tels que $f : x \mapsto \lambda x \ln(x) + \mu x - \ln(x) - 1$ vérifie $f(1) = f'(1) = 0$ et on obtient bien $\lambda = 0$ et $\mu = 1$.

Problème 3

Les trois parties centrales de ce problème présentent trois méthodes différentes pour effectuer le même calcul de la fonction g définie ci-dessous.

On définit la fonction g par
$$g : x \mapsto \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(t+1)^2(t^2+1)} \mathrm{d}t.$$

Hors d'œuvre

On pose $f(t) = \dfrac{1}{(t+1)^2(t^2+1)}$

1. Par quotient, $f(t)$ est défini ssi $(t+1)^2(t^2+1) \neq 0$, ssi $t + 1 \neq 0$.
   Donc $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$.
2. De même, f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. En particulier, pour tout $x > 0$, l'intervalle d'extrémités x et $1/x$ est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, donc dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
   f étant continue sur cet intervalle, $\boxed{g \text{ est bien définie pour } x > 0}$.
3. $g(1) = \displaystyle\int_1^1 \frac{1}{(t+1)^2(t^2+1)} \mathrm{d}t = \boxed{0}$.
4. $g\left(\dfrac{1}{x}\right) = \displaystyle\int_x^{\frac{1}{x}} \frac{1}{(t+1)^2(t^2+1)} \mathrm{d}t = -\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(t+1)^2(t^2+1)} \mathrm{d}t = \boxed{-g(x)}$.

Entrée : cromesquis de théorème fondamental

On note F une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. $g(x)\,[F(t)]_{\frac{1}{x}}^{x} = \boxed{F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right)}$.

6. F étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, g l'est aussi sur $\mathbb{R}_+^*$ par somme et composition, car $\forall x > 0,\ \frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = f(x) - \left(-\frac{1}{x^2}\right) f\left(\frac{1}{x}\right)$.

   Donc
   $$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} + \frac{1}{x^2}\frac{1}{\left(\frac{1}{x}+1\right)^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} + \frac{1}{x^2}\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)} \\ &= \frac{1+x^2}{(x+1)^2(x^2+1)} \\ &= \boxed{\frac{1}{(x+1)^2}} \end{aligned}$$
   . Donc il existe $K \in \mathbb{R}$ constante telle que $g(x) = -\frac{1}{x+1} + K$.

   Comme $g(1) = 0$, on a $K = \frac{1}{2}$. Donc pour tout $x > 0$, $\boxed{g(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}}$.

Plat de résistance : rôti de changement de variable

7. Effectuons le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, qui donne $t = \frac{1}{u}$ ou encore $\mathrm{d}t = -\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$. Pour les bornes : $t = \frac{1}{x} \Rightarrow u = x$ et $t = x \Rightarrow u = \frac{1}{x}$.

   Ainsi $g(x) = \displaystyle\int_x^{\frac{1}{x}} -\frac{1}{u^2}\frac{1}{\left(\frac{1}{u}+1\right)^2\left(\frac{1}{u^2}+1\right)}\mathrm{d}u = \int_x^{\frac{1}{x}} -\frac{u^2}{(1+u)^2(1+u^2)}\mathrm{d}u = \boxed{\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{u^2}{(1+u)^2(1+u^2)}\mathrm{d}u}$.

8. En sommant cette expression et celle de la définition, on a par linéarité de l'intégrale : $2g(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1+u^2}{(1+u)^2(1+u^2)}\mathrm{d}u = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(1+u)^2}\mathrm{d}u$.

   On intègre : $2g(x) = \left[-\frac{1}{1+u}\right]_{\frac{1}{x}}^{x} = -\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x+1}$.

   Ainsi $\boxed{\forall x > 0,\ g(x) = \frac{1}{2}\frac{x-1}{x+1}}$.

Dessert : tarte à la crème

9. On réduit tout cela au même dénominateur : $(t+1)^2(t^2+1)$ puis on identifie (avec un argument polynomial : deux polynômes sont égaux si et seulement si leurs coefficients sont égaux). On obtient :

$$\boxed{f(t) = \frac{1/2}{t+1} + \frac{1/2}{(t+1)^2} + \frac{-\frac{1}{2}t}{t^2+1}}.$$

Cela donne pour primitive sur $\mathbb{R}_+^*$: $\boxed{F(t) = \frac{1}{2}\ln(t+1) - \frac{1/2}{t+1} - \frac{1}{4}\ln(t^2+1)}$.

10. On utilise alors $g(x) = F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right)$, on simplifie et on retrouve $\boxed{g(x) = \frac{1}{2}\frac{x-1}{x+1}}$.

Café et digestif

11. Soit $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Tout d'abord $\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{\cos^2\theta}{1+\sin(2\theta)}\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{1+\cos(2\theta)}{2(1+\sin(2\theta))}\mathrm{d}\theta$.

On effectue le changement de variable $t = \tan(\theta)$. Alors $\mathrm{d}t = (1+\tan^2(\theta))\mathrm{d}\theta$, soit $\mathrm{d}\theta = \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

On vérifie (exercice) que $\cos(2\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin(2\theta) = \frac{2t}{1+t^2}$.

On utilise également que $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan(\theta)}$.

Finalement $\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{\cos^2\theta}{1+\sin(2\theta)}\mathrm{d}\theta = \int_{\tan(\alpha)}^{1/\tan(\alpha)} \frac{1}{(1+t)^2(1+t^2)}\mathrm{d}t$ après simplifications.

Donc $\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{\cos^2\theta}{1+\sin(2\theta)}\mathrm{d}\theta = g\left(\frac{1}{\tan(\alpha)}\right) = \boxed{\frac{1}{2}\frac{\tan(\alpha)-1}{\tan(\alpha)+1}}$.