# Sol C1.
# Ensembles et applications

**Exercice C1.5**

Soit $E$ un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ deux recouvrements disjoints de $E$ ($I$ et $J$ étant eux-même des ensembles).
Montrons que $(A_i \cap B_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est également un recouvrement disjoint de $E$.

- Soit $x \in E$.
  Comme les $(A_i)$ forment un recouvrement, $\exists i_0 \in I$, $x \in A_{i_0}$ ; et comme les $(B_j)$ forment un recouvrement, $\exists j_0 \in I$, $x \in b_{j_0}$.
  Donc $x \in A_{i_0} \cap B_{j_0}$.
- Soit $(i, j)$ et $(i', j')$ dans $I \times J$.
  $(A_i \cap B_j) \cap (A_{i'} \cap B_{j'})$ est contenu dans $A_i \cap A_{i'}$ par exemple, donc $(A_i \cap B_j) \cap (A_{i'} \cap B_{j'}) = \emptyset$.

**Exercice C1.14**

On définit sur $\mathbb{Z}$ la relation binaire $\sim$ par : $\forall p, q \in \mathbb{Z}$, $p \sim q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}$, $2^n a = b$.

**réflexivité :** Soit $p \in \mathbb{Z}$. On a $2^0 p = p$ donc $p \sim p$.

**symétrie :** Soit $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $p \sim q$. Alors on dispose de $n \in \mathbb{Z}$ tels que $2^n p = q$. Comme $2^{-n} q = p$ avec $-n \in \mathbb{Z}$, on a $q \sim p$.

**transitivité :** Soit $p, q, r \in \mathbb{Z}$ tels que $p \sim q$ et $q \sim r$. On dispose alors de $n$ et $m \in \mathbb{Z}$ tels que $2^n p = q$ et $2^m q = r$. Alors $2^{m+n} p = 2^m(2^n p) = r$. Donc $p \sim r$.

Donc $\sim$ est une relation d'équivalence.
La classe d'équivalence d'un entier $p$ est $\{2^n p \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
Ainsi $\overline{0} = \{0\}$, $\overline{1} = \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, $\overline{-1} = \{-2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ et $\overline{28} = \{7 \times 2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.