DEVOIR SURVEILLÉ N° 4

Les calculatrices et les documents sont interdits.
Les résultats devront être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Étant donné $k \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire suivant, d'inconnues $x,y,z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + (k^2 - 5)z = k \end{cases}$$

   (a) Écrire la matrice augmentée du système et donner une matrice échelonnée qui lui est équivalente par lignes.
   (b) Pour quelles valeurs de k le système admet-il une unique solution ? La déterminer le cas échéant.
   (c) Pour quelles valeurs de k le système admet-il une infinité de solutions ? Les exprimer alors.
   (d) Pour quelles valeurs de k le système est-il incompatible ?

2. Étant donnés $a,b,c \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire suivant, d'inconnues $x,y,z,t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + 2y + z - t = b + c \\ 2x + 5y - z + t = a \\ x + 3y - 2z + 2t = b \\ x + y + 4z - 4t = c \end{cases}.$$

   Déterminer l'ensemble des valeurs de (a,b,c,d) telles que ce système soit compatible.

Problème 2

Une équation différentielle du second ordre

Le but de cette partie est de déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \qquad (E)$$

On considère l'équation homogène associée :

$$y'' + 2y' + 4y = 0 \qquad (H)$$

1. Donner toutes les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solutions de l'équation homogène (H).
2. Déterminer une solution de l'équation (E) sous la forme $x \mapsto (ax + b)e^x$ (avec $a,b \in \mathbb{R}$).
3. En déduire l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation (E).

De la superposition

4. Énoncer le principe de superposition des solutions pour une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
5. Déterminer toutes les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle
$$y'' + 2y' + 4y = xe^x + 4 \tag{E'}$$

Une équation non linéaire

Le but de cette partie est de résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle
$$x^2y'' + 3xy' + 4y = x\ln(x) \tag{F}$$
Étant donnée une fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, on note $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = h(\ln(x))$.

6. Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
7. Montrer que f est solution de (F) si et seulement si h est solution d'une équation que l'on précisera.
8. En déduire les fonctions définies sur $]0, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, solutions de (F)

Problème 3

Étant donné un ensemble E, on rappelle la notation $\mathcal{P}(E)$ pour désigner l'ensemble des parties de E. On appelle **tribu** sur E tout ensemble $\tau \subset \mathcal{P}(E)$ (donc un ensemble de parties de E) vérifiant les trois propriétés suivantes :

T_1) $\tau \neq \emptyset$.

T_2) τ est stable par passage au complémentaire : $\forall A \in \tau, E \setminus A \in \tau$.

T_3) τ est stable par réunion dénombrable : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de τ, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \tau$.

Par exemple, on vérifie aisément que $\mathcal{P}(E)$ est une tribu sur E.

A Premières propriétés

Soit E un ensemble.

1. Montrer que $\tau_0 = \{\emptyset, E\}$ est une tribu sur E.
2. Soit τ une tribu sur E.
   (a) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de τ. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \tau$.
   On dira que τ est stable par intersection dénombrable.
   (b) Soit $N \in \mathbb{N}$ et $(A_n)_{0\leq n\leq N}$ une famille d'éléments de τ. Montrer que $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{N} A_n \in \tau$ et $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{N} A_n \in \tau$.
   On dira que τ est stable par réunion finie et intersection finie.
   (c) Montrer que $\emptyset \in \tau$ et $E \in \tau$.
   (d) Montrer que $\forall A,B \in \tau, A \setminus B \in \tau$.
3. Étant données deux parties A et B de E, on rappelle la définition de la différence symétrique :
$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$
   (a) Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ est un groupe.
   (b) Soit τ une tribu sur E. Montrer que τ est un sous-groupe de $(\mathcal{P}(E), \Delta)$.

B Image réciproque et image directe d'une tribu

Soit E, E' deux ensembles et $f : E \to E'$ une application.

4. Soit τ' une tribu sur E'. On pose $\tau = \{f^{-1}(B) \mid B \in \tau'\}$. Montrer que τ est une tribu sur E.
5. Soit τ une tribu sur E. On pose $\tau' = \{f(A) \mid A \in \tau\}$. Montrer, à l'aide d'un contre-exemple, que τ' n'est pas nécessairement une tribu sur E'.

C Tribu engendrée par une partie

Soit E un ensemble.

6. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de E. On note F l'ensemble des tribus τ sur E telles que $\mathcal{A} \subset \tau$.
   (a) Montrer que $F \neq \emptyset$.
   (b) On pose $\sigma = \bigcap_{\tau \in F} \tau$. Montrer que σ est une tribu sur E et que $\mathcal{A} \subset \sigma$.
   (c) Montrer que si τ' est une tribu sur E telle que $\mathcal{A} \subset \tau'$, alors $\sigma \subset \tau'$.
   On dit que σ est la tribu de E engendrée par $\mathcal{A}$.
7. Soit X une partie de E telle que $X \neq \emptyset$ et $X \neq E$. Déterminer la tribu de E engendré par $\{X\}$.
8. Déterminer la tribu de $\mathbb{N}$ engendrée par $\{[\![0,n]\!] \mid n \in \mathbb{N}\}$.

D Fibre d'un élément

Soit E un ensemble, τ une tribu sur E et $x \in E$.
On note $\tau_x = \{A \in \tau \mid x \in A\}$ et on appelle **fibre** de x l'ensemble $\Phi(x) = \bigcap_{A \in \tau_x} A$.

9. Soit $x,y \in E$ tels que $x \in \Phi(y)$.
   (a) Montrer que $\Phi(x) \subset \Phi(y)$.
   (b) Montrer par l'absurde que $y \in \Phi(x)$. En déduire que $\Phi(x) = \Phi(y)$.
10. Soit $P = \{\Phi(x) \mid x \in E\}$. Montrer que P est une partition de E.

E Applications mesurables

On appelle **espace mesurable** tout couple (E,τ) où E est un ensemble et τ est une tribu sur E.
Soit (E,τ) et (E',τ') deux espaces mesurables. Une **application mesurable** de (E,τ) vers (E',τ') est une application $f : E \to E'$ telle que

$$\forall B \in \tau', f^{-1}(B) \in \tau.$$

11. Soit (E,τ) et (E',τ') deux espaces mesurables. Quelles sont les applications mesurables de (E,τ) vers (E',τ') dans le cas où :
    (a) $\tau = \mathcal{P}(E)$?
    (b) $\tau' = \{\emptyset, E'\}$?
    (c) $\tau = \{\emptyset, E\}$ et $\tau' = \mathcal{P}(E')$?
12. Soit (E,τ), (E',τ') et (E'',τ'') trois espaces mesurables, f une application mesurable de (E,τ) vers (E',τ') et g une application mesurable de (E',τ') vers (E'',τ''). Montrer que $g \circ f$ est une application mesurable de (E,τ) vers (E'',τ'')