Problème 1

1. Étant donné $k \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire suivant, d'inconnues $x,y,z \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ x+2y+z=3 \\ x+y+(k^2-5)z=k \end{cases}$$

(a) Matrice augmentée du système : $\boxed{A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & (k^2-5) & k \end{array}\right)}$.

Par l'algorithme du pivot de Gauß, on a $\boxed{A \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & (k^2-4) & k-2 \end{array}\right)}$ $\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$.

(b) La matrice du système est de rang 3 si et seulement si $k^2-4 \neq 0$, *i.e.* $\boxed{k \in \mathbb{R} \setminus \{2,-2\}}$. Dans ce cas, après calculs, le système est équivalent à $\begin{cases} x = 1 + \dfrac{3}{k+2} \\ y = 1 - \dfrac{2}{k+2} \\ z = \dfrac{1}{k+2} \end{cases}$.

D'où l'unique solution $\boxed{\left\{\left(1+\dfrac{3}{k+2}, 1-\dfrac{2}{k+2}, \dfrac{1}{k+2}\right)\right\}}$.

(c) Pour $\boxed{k=2}$, $A \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Le système est compatible avec une infinité de solutions. On peut les déterminer en fonction de l'inconnue secondaire z : le système est équivalent à $\begin{cases} x = 1+3z \\ y = 1-2z \end{cases}$.

D'où l'ensemble solution $\boxed{\{(1+3z, 1-2z, z)\}}$.

(d) Pour $\boxed{k=-2}$, $A \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$. Le système est alors incompatible.

2. Étant donnés $a,b,c \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire suivant, d'inconnues $x,y,z,t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x+2y+z-t=b+c \\ 2x+5y-z+t=a \\ x+3y-2z+2t=b \\ x+y+4z-4t=c \end{cases}.$$

Matrice augmentée du système :

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & b+c \\ 2 & 5 & -1 & 1 & a \\ 1 & 3 & -2 & 2 & b \\ 1 & 1 & 4 & -4 & c \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & b+c \\ 0 & 1 & -3 & 3 & a-2b-2c \\ 0 & 1 & -3 & 3 & -c \\ 0 & -1 & 3 & -3 & -b \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & b+c \\ 0 & 1 & -3 & 3 & a-2b-2c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a+2b+c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-3b-2c \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array}.$$

Le système associé est de rang 2, avec deux équations de compatibilité.

Il est compatible si et seulement si $\begin{cases} -a+2b+c=0 \\ a-3b-2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+2b+c=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a=-c \\ b=-c \end{cases}$.

Finalement, $\boxed{\text{le système est compatible si et seulement si } (a,b,c) \in \{(-c,-c,c) \mid c \in \mathbb{R}\}}$.

Problème 2

Une équation différentielle du second ordre

Le but de cette partie est de déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x \tag{E}$$

On considère l'équation homogène associée :

$$y'' + 2y' + 4y = 0 \tag{H}$$

1. Équation caractéristique associée à (H) : $r^2 + 2r + 4 = 0$, de solutions $-1 \pm i\sqrt{3}$.
   Les solutions réelles de (H) sont donc $\boxed{\left\{x \mapsto \left(\lambda\cos(\sqrt{3}x) + \mu\sin(\sqrt{3}x)\right)e^{-x} \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\right\}}$.
2. Soit $f : x \mapsto (ax+b)e^x$ avec $a,b \in \mathbb{R}$.
   f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (ax+a+b)e^x$ et $f''(x) = (ax+2a+b)e^{-x}$.

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + 2f'(x) + 4f(x) = xe^x \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (7ax + 4a + 7b)e^x = xe^x \\ &\Leftrightarrow a = \frac{1}{7} \text{ et } b = -\frac{4}{49}. \end{aligned}$$

   D'où une solution de l'équation (E) : $\boxed{x \mapsto \left(\frac{1}{7}x - \frac{4}{49}\right)e^x}$.

3. D'où les solutions réelles de (E) : $\boxed{\left\{x \mapsto \left(\frac{1}{7}x - \frac{4}{49}\right)e^x + \left(\lambda\cos(\sqrt{3}x) + \mu\sin(\sqrt{3}x)\right)e^{-x} \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\right\}}$.

De la superposition

4. Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et b_1, b_2 deux fonctions $I \to \mathbb{R}$ continues (avec I un intervalle de $\mathbb{R}$).
   Si f_1 est solution sur I de $ay'' + by' + cy = b_1$ et f_2 est solution sur I de $ay'' + by' + cy = b_2$, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda f_1 + \mu f_2)$ est solution sur I de $ay'' + by' + cy = \lambda b_1 + \mu b_2$.
5. $x \mapsto 1$ est solution de $y'' + 2y' + 4y = 4$.
   Par principe de superposition des solutions, les solutions de (**??**) sont

$$\boxed{\left\{x \mapsto \left(\frac{1}{7}x - \frac{4}{49}\right) e^x + 1 + \left(\lambda \cos(\sqrt{3}x) + \mu \sin(\sqrt{3}x)\right) e^{-x} \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\right\}}.$$

Une équation non linéaire

Le but de cette partie est de résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle

$$x^2y'' + 3xy' + 4y = x\ln(x) \qquad (F)$$

Étant donnée une fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, on note $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in]0,+\infty[, f(x) = h(\ln(x))$.

6. $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons h deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   ln est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Par composition, $h \circ \ln = f$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $h(t) = f(e^t)$. Or exp est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Donc par composition, $f \circ \exp = h$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Donc $\boxed{\text{l'équivalence est vérifiée}}$.
7. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{x}h'(\ln(x))$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2}h'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2}h''(\ln(x))$.
   Ainsi $xf'(x) = h'(\ln(x))$ et $x^2f''(x) = h'(\ln(x)) + h''(\ln(x))$.

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (F) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x^2f''(x) + 3xf'(x) + 4f(x) = x\ln(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, h''(\ln(x)) + 2h'(\ln(x)) + 4h(\ln(x)) = x\ln(x) \\ &\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, h''(t) + 2h'(t) + 4h(t) = te^t. \end{aligned}$$

   Donc $\boxed{f \text{ est solution de } (F) \text{ si et seulement si } h \text{ est solution de } (E)}$.
8. Les solutions à valeurs réelles de (F) sont donc

$$\boxed{\left\{x \mapsto \left(\frac{1}{7}\ln(x) - \frac{4}{49}\right) x + \left(\lambda \cos(\sqrt{3}\ln(x)) + \mu \sin(\sqrt{3}\ln(x))\right) \frac{1}{x} \mid \lambda,\mu \in \mathbb{R}\right\}}.$$

Problème 3

1. Montrons que les propriétés T_1, T_2 et T_3 sont vérifiées par $\tau_0 = \{\emptyset, E\}$.
   - Par définition de τ_0, $\emptyset \in \tau_0$, donc $\tau_0 \neq \emptyset$. T_1 est donc vérifiée.
   - Soit $A \in \tau_0$. On a deux cas possibles.
     — Cas 1 : $A = \emptyset$. On a alors $E \setminus A = E$.
     — Cas 2 : $A = E$. On a alors $E \setminus A = \emptyset$.

     Dans tous les cas $E \setminus A \in \tau_0$, donc T_2 est vérifiée.

- Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de τ_0. On a deux cas possibles :
  — Cas 1 : $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \emptyset$. On a alors $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$.
  — Cas 2 : Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A_p \neq \emptyset$. Comme τ_0 ne contient que $\emptyset$ et E, on en déduit $A_p = E$. Par conséquent, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$.

  Dans tous les cas, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \tau_0$, donc T_3 est vérifiée.

Donc $\boxed{\tau_0 = \{\emptyset, E\} \text{ est une tribu sur } E}$.

2. (a) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de τ. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = E \setminus A_n$. On a alors

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (E \setminus B_n) = E \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right).$$

Comme τ est stable par passage au complémentaire, $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \in \tau$. Puis, comme τ est stable par réunion dénombrable, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \tau$. Enfin, comme τ est stable par passage au complémentaire, $E \setminus \left(\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \in \tau$, *i.e.* $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \tau$. Donc $\boxed{\tau \text{ est stable par intersection dénombrable}}$.

(b) Soit $N \in \mathbb{N}$ et $(A_n)_{0\leq n\leq N}$ une famille d'éléments de τ. Posons, pour tout $n > N$, $A_n = A_N$. On a ainsi défini une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de τ. Comme τ est stable par réunion dénombrable et intersection dénombrable, on en déduit

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \tau \text{ et } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \tau.$$

Or :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n=0}^{N-1} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n\right) = \left(\bigcup_{n=0}^{N-1} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_N\right) = \left(\bigcup_{n=0}^{N-1} A_n\right) \cup A_N = \bigcup_{n=0}^{N} A_n$$
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcap_{n=0}^{N-1} A_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=N}^{+\infty} A_n\right) = \left(\bigcap_{n=0}^{N-1} A_n\right) \cap \left(\bigcap_{n=N}^{+\infty} A_N\right) = \left(\bigcap_{n=0}^{N-1} A_n\right) \cap A_N = \bigcap_{n=0}^{N} A_n$$

Donc $\boxed{\tau \text{ est stable par réunion finie et intersection finie}}$.

(c) Comme $\tau \neq \emptyset$, il existe $A \in \tau$. On a :

$$E = A \cup (E \setminus A) \text{ et } \emptyset = A \cap (E \setminus A).$$

τ est stable par passage au complémentaire donc $E \setminus A \in \tau$. Comme τ est stable par intersection finie et réunion finie, on en déduit que $\boxed{\emptyset \in \tau \text{ et } E \in \tau}$.

(d) Soit $A,B \in \tau$. On a $A \setminus B = A \cap (E \setminus B)$. Comme τ est stable par passage au complémentaire et par intersection finie, $E \setminus B \in \tau$, puis $A \cap (E \setminus B) \in \tau$. Donc $\boxed{\forall A,B \in \tau, A \setminus B \in \tau}$.

3. (a)
   - Δ est une lci sur $\mathcal{P}(E)$.
   - $\mathcal{P}(E)$ contient $\emptyset$, neutre pour Δ : en effet, $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A\Delta\emptyset = (A \cup \emptyset) \setminus (A \cap \emptyset) = A$.
   - $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A\Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \emptyset$.

- Pour l'associativité, on peut faire des calculs ensemblistes. Proposition alternative : on note $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice d'un ensemble $A \subset E$.
  $A\Delta B$ est l'ensemble des éléments appartenant à l'un des ensembles A et B mais pas les deux. Ainsi $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $\mathbb{1}_{A\Delta B} = (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B) \bmod 2$ (on peut aisément le vérifier en regardant les différents cas).
  Soit $A,B,C \in \mathcal{P}(E)$. $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} = ((\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B) \bmod 2 + \mathbb{1}_C) \bmod 2 = (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C) \bmod 2$. Cette expression est bien sûr symétrique en A,B,C, donc on aura aussi $\mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)} = (\mathbb{1}_A + (\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C) \bmod 2) \bmod 2 = (\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C) \bmod 2$.
  Ainsi $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} = \mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)}$ donc $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

(b) Soit τ une tribu sur E.
  - $\tau \subset \mathcal{P}(E)$.
  - $\emptyset \in \tau$.
  - Soit $A,B \in \tau$. Alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont dans τ, et donc $A \cap \overline{B}$ et $B \cap \overline{A}$ également. Finalement $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \in \tau$.
  - Soit $A \in \tau$. Alors son symétrique pour Δ : $A \in \tau$.

  Donc $\boxed{\tau \text{ est un sous-groupe de } (\mathcal{P}(E),\Delta)}$.

4. Montrons que τ est une tribu sur E.
   - Comme τ' est une tribu, $\tau' \neq \emptyset$. Soit $B \in \tau'$. On a alors $f^{-1}(B) \in \tau$, par définition de τ. Donc $\tau \neq \emptyset$.
   - Soit $A \in \tau$. Par définition de τ, il existe $B \in \tau'$ tel que $A = f^{-1}(B)$. Ainsi,
   $$E \setminus A = E \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(E' \setminus B).$$
   En effet, $f(x) \notin B \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B)$.
   Comme τ' est stable par passage au complémentaire, $E' \setminus B \in \tau'$, donc $E \setminus A \in \tau$.
   - Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de τ. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe alors $B_n \in \tau'$ tel que $f^{-1}(B_n) = A_n$.
   Comme τ' est stable par réunion dénombrable, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \tau'$. Montrons que $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$.
   Soit $x \in E$. On a les équivalences suivantes :
   $$\begin{aligned} x \in f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) &\Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, f(x) \in B_n \\ &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, x \in f^{-1}(B_n) = A_n \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n. \end{aligned}$$
   Ainsi, $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$ et donc $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \tau$.

   Finalement, $\boxed{\tau \text{ est une tribu sur } E}$.
5. Une application non surjective fournit un contre-exemple. Par exemple considérons $E = \{0\}$, $E' = \{0,1\}$, $\tau = \mathcal{P}(E) = \{\emptyset,E\}$ et $f : 0 \mapsto 0$. On a alors $f(\emptyset) = \emptyset$ et $f(E) = \{0\}$, donc $\tau' = \{\emptyset,\{0\}\}$. En particulier, $E' \notin \tau'$. Donc $\boxed{\tau' \text{ n'est pas une tribu sur } E'}$.
6. (a) $\mathcal{P}(E)$ est une tribu sur E et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ par définition de $\mathcal{A}$. D'où $\mathcal{P}(E) \in F$ et donc $\boxed{F \neq \emptyset}$.

(b) Soit $A \in \mathcal{A}$. Par définition de F, $\forall \tau \in F, \mathcal{A} \subset \tau$, d'où $\forall \tau \in F, A \in \tau$. On en déduit $A \in \bigcap_{\tau \in F} \tau = \sigma$ et donc $\mathcal{A} \subset \sigma$. Montrons ensuite que σ est une tribu sur E. Remarquons tout d'abord que, par définition de σ, on a l'équivalence

$$\forall X \in \mathcal{P}(E), \, (X \in \sigma \Leftrightarrow \forall \tau \in F, X \in \tau) \, .$$

- Soit $\tau \in F$. τ est une tribu sur E, donc $\emptyset \in \tau$. Ainsi $\forall \tau \in F, \emptyset \in \tau$ et donc $\emptyset \in \sigma$, par définition de σ. En particulier $\sigma \neq \emptyset$.
- Soit $A \in \sigma$ et $\tau \in F$. τ est une tribu sur E et $A \in \tau$, d'où $E \setminus A \in \tau$. Ainsi $\forall \tau \in F, E \setminus A \in \tau$ et donc $E \setminus A \in \sigma$.
- Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'éléments de σ. Posons $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Soit $\tau \in F$. On a $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \tau$. Comme τ est une tribu, on en déduit $B \in \tau$. Ainsi, $\forall \tau \in F, B \in \tau$ et donc $B \in \sigma$.

Donc $\boxed{\sigma \text{ est une tribu sur } E \text{ et } \mathcal{A} \subset \sigma}$.

(c) Soit τ' une tribu sur E telle que $\mathcal{A} \subset \tau'$. Par définition de F, on a $\tau' \in F$.
Soit $A \in \sigma$. Par définition de σ, $\forall \tau \in F, A \in \tau$. En particulier, $A \in \tau'$.
Donc $\boxed{\sigma \subset \tau}$.

7. Soit σ la tribu engendrée par $\{X\}$. D'après les questions précédentes, $\emptyset \in \sigma$ et $E \in \sigma$. De plus, par définition, $X \in \sigma$. Donc, comme σ est une tribu, $E \setminus X \in \sigma$. On a donc $\tau = \{\emptyset, X, E \setminus X, E\} \subset \sigma$. Pour montrer l'inclusion réciproque, commençons par montrer que τ est une tribu.
   - $\tau \neq \emptyset$ et τ est stable par passage au complémentaire.
   - Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de τ. Posons $\mathcal{A} = \{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. On distingue plusieurs cas :
     - Cas 1 : $E \in \mathcal{A}$ ou $(X \in \mathcal{A}$ et $E \setminus X \in \mathcal{A})$. Dans ce cas, $B = E$.
     - Cas 2 : $\mathcal{A} \subset \{\emptyset, X\}$ et $X \in \mathcal{A}$. Dans ce cas $B = X$.
     - Cas 3 : $\mathcal{A} \subset \{\emptyset, E \setminus X\}$ et $E \setminus X \in \mathcal{A}$. Dans ce cas $B = E \setminus X$.
     - Cas 4 : $\mathcal{A} = \{\emptyset\}$. Dans ce cas $B = \emptyset$.

     On constate que dans tous les cas, $B \in \tau$.

   Donc τ est une tribu. Comme $\{X\} \subset \tau$, on en déduit, d'après la question précédente que $\sigma \subset \tau$.
   Donc $\boxed{\text{la tribu engendrée par } \{X\} \text{ est } \{\emptyset, X, E \setminus X, E\}}$.

8. Soit σ la tribu engendrée par $\{[\![0,n]\!] \mid n \in \mathbb{N}\}$. Montrons que $\sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
   Tout d'abord, on a $\{0\} = [\![0,0]\!] \in \sigma$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\{n\} = [\![0,n]\!] \setminus [\![0,n-1]\!]$. Donc, d'après la question 2d, $\{n\} \in \sigma$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \{n\} \in \sigma$.
   Soit $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Si $B = \emptyset$, alors $B \in \sigma$. Supposons $B \neq \emptyset$ et considérons $b \in B$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = \left\{ \begin{array}{ll} \{n\} & \text{si } n \in B \\ \{b\} & \text{sinon.} \end{array} \right.$ On a par définition $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset B$, donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset B$.
   De plus, pour tout $x \in B$, on a $x \in A_x$ et donc $B \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. On a donc montré $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.
   Or, d'après ce qui précède, $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \in \sigma$. Comme σ est stable par réunion dénombrable, on en déduit $B \in \sigma$. Donc $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \subset \sigma$.
   L'inclusion réciproque étant vraie par définition d'une tribu, on en déduit que

$$\boxed{\text{la tribu de } \mathbb{N} \text{ engendrée par } \{[\![0,n]\!] \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ est } \mathcal{P}(\mathbb{N})}.$$

9. (a) Supposons $\tau = \mathcal{P}(E)$.
Soit $f : E \to E'$. Soit $B \in \tau'$. Par définition d'une image réciproque, $f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(E)$, donc $f^{-1}(B) \in \tau$.
On a donc montré $\forall B \in \tau', f^{-1}(B) \in \tau$, *i.e.* $\boxed{f \text{ est mesurable}}$.

   (b) Supposons $\tau' = \{\emptyset, E'\}$. Soit $f : E \to E'$. Soit $B \in \tau'$. On a alors deux cas possibles.
   - Cas 1 : $B = \emptyset$. Dans ce cas $f^{-1}(B) = \emptyset \in \tau$, car τ est une tribu.
   - Cas 2 : $B = E'$. Dans ce cas $f^{-1}(B) = E \in \tau$, car τ est une tribu.

   Donc dans tous les cas, $f^{-1}(B) \in \tau$.
On a donc montré $\forall B \in \tau', f^{-1}(B) \in \tau$, *i.e.* $\boxed{f \text{ est mesurable}}$.

   (c) Supposons $\tau = \{\emptyset, E\}$ et $\tau' = \mathcal{P}(E')$. Soit $f : E \to E'$ une application mesurable. Soit $x \in E$. Posons $B = \{f(x)\}$. On a $B \in \mathcal{P}(E') = \tau'$. Ainsi, comme f est mesurable, $f^{-1}(B) \in \tau$. Or $x \in f^{-1}(B)$, par définition de B. On en déduit $f^{-1}(B) = E$. Par conséquent, pour tout $x' \in E$, $x' \in f^{-1}(B)$, d'où $f(x') \in B$ et donc $f(x') = f(x)$. On a donc montré $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x')$, donc f est constante. Réciproquement, si f est constante, alors pour toute partie B de E', on a bien $f^{-1}(B) = \emptyset$ ou $f^{-1}(B) = E$. Ainsi, toutes les applications constantes sont mesurables.
Finalement, $\boxed{\text{les applications } f : E \to E' \text{ mesurables sont les applications constantes}}$.

10. Soit $C \in \tau''$. On a, par propriété de cours, $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right)$. Comme g est mesurable, $g^{-1}(C) \in \tau'$. De plus, comme f est mesurable, $f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right) \in \tau$. On a donc montré :

$$\forall C \in \tau'', (g \circ f)^{-1}(C) \in \tau.$$

Donc $\boxed{g \circ f \text{ est mesurable}}$.