Les résultats devront être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1

A Étude d'une suite réelle

On rappelle les définitions suivantes :

- Un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dit **stable** par une fonction f lorsque $\forall x \in I,\ f(x) \in I$.
- On dit qu'un réel x est un **point fixe** de la fonction f lorsque $f(x) = x$.

Soit $c \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $\begin{cases} x_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n^2 + c \end{cases}$.

1. Déterminons la suite (x_n) dans quelques cas particuliers.
   (a) Décrire la suite (x_n) dans le cas où $c = 0$.
   (b) Calculer les premiers termes de la suite (x_n) dans le cas où $c = -2$. Conclure.
   (c) Mêmes questions avec $c = -1$.
2. Soit $f : x \mapsto x^2 + c$ et $g : x \mapsto f(x) - x$.
   (a) Étudier la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer, en fonction de c, le nombre de zéros de g. Lorsqu'il y en a 2, on les notera α et β avec $\alpha < \beta$. Donner alors leur expression en fonction de c.
   (c) Donner, dans ces différents cas, le signe de g.
   (d) Déterminer (en fonction de c) les deux réels a et b tels que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, f\left(f(x)\right) - x = \left(f(x) - x\right)\left(x^2 + ax + b\right).$$
3. On suppose dans cette question que $c \in \left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$.
   (a) Montrer que la suite (x_n) est strictement croissante.
   (b) Montrer que (x_n) n'admet pas de limite finie.
   (c) En déduire le comportement de (x_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
4. On suppose dans cette question que $c \in \left]-\infty, -2\right[$.
   (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $x_n > -c$.
   (b) Montrer que $\beta < -c$ et en déduire les variations de (x_n).
   (c) On admet (c'est la même démonstration qu'à la question 3) que (x_n) n'a pas de limite finie. En déduire son comportement lorsque n tend vers $+\infty$
5. On suppose dans cette question que $c \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$.
   (a) Montrer que $[0,\alpha[$ est stable par f. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant x_n < a$.

(b) Déterminer le sens de variation de (x_n).

(c) En déduire la convergence de (x_n) et préciser sa limite.

6. On suppose dans cette question que $c \in \left[-\frac{3}{4}, 0\right[$.

   (a) Montrer que $c < \alpha < 0$.

   (b) Justifier que α et β sont des points fixes de $f \circ f$ et que ce sont les seuls.

   (c) Montrer que $f \circ f$ est strictement croissante sur $[c,0]$.

   (d) En déduire que $f(c) > \alpha$ puis que $[\alpha,0[$ est stable par $f \circ f$.

   (e) Déterminer le sens de variations de la suite (x_{2n}) et sa convergence vers une limite à préciser.

   (f) Déterminer les variations, la convergence et la limite de (x_{2n+1}).

   (g) En déduire le comportement de la suite (x_n).

7. On suppose dans cette question que $c \in \left]-2, -\frac{3}{4}\right[$.

   (a) Démontrer que $|f(c)| < -c$ et $|f(-c)| < c$.

   (b) Dresser le tableau de variations complet de f sur $[-c,c]$ et en déduire que (x_n) est bornée.

8. Bilan : Déterminer l'ensemble A des nombres réels c tels que la suite (x_n) ne tende pas vers $+\infty$.

Étude d'une suite complexe

Soit maintenant $c \in \mathbb{C}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres complexes définie par $\begin{cases} z_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = z_n^2 + c \end{cases}$.
Cette définition dépend bien sûr du nombre c fixé. Si nécessaire, on notera $z_n(c)$ les nombres z_n ainsi définis. Comme dans la première partie, le but du problème est d'étudier l'ensemble

$$B = \left\{c \in \mathbb{C},\ (|z_n(c)|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ne tend pas vers } +\infty\right\}.$$

9. Préliminaires.

   (a) Montrer que si $(|z_n|)$ est bornée, alors $c \in B$. *(résultat que vous penserez à utiliser dans la suite du problème)*

   (b) Étude d'un cas particulier : déterminer la suite $(z_n(i))$ et en déduire que $i \in B$.

   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n(\overline{c}) = \overline{z_n(c)}$. En déduire que $c \in B \Leftrightarrow \overline{c} \in B$.

10. Supposons que $|c| \leqslant \frac{1}{4}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| \leqslant \frac{1}{2}$. En déduire que $c \in B$.

11. c est à nouveau quelconque.

    (a) Montrer que l'équation $x^2 = x + |c|$ admet exactement une solution réelle dans $[1, +\infty[$. On la notera r.

    (b) Montrer que $|c| - r = \dfrac{2|c| - 1 - \sqrt{1+4|c|}}{2}$.

    (c) Si $|c| > 2$, comparer $2|c| - 1$ et $\sqrt{1+4|c|}$ puis en déduire que $|c| > r$.

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $e_n = |z_n| - r$.

    (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(r + e_n)^2 \leqslant r^2 + e_{n+1}$.

    (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e_{n+1} \geqslant 2re_n$.

    (c) Si $|c| > 2$, montrer que $|z_1| > r$ puis que $\forall n \geqslant 1$, $\dfrac{e_n}{e_1} \geqslant \dfrac{(2r)^n}{2r}$.

    (d) En déduire que $c \notin B$.

13. Bilan : décrire et/ou dessiner (en vous référant aux résultats de cette partie) deux parties du plan complexe qui encadrent l'ensemble B.

Étude d'un cas particulier

On fixe pour cette partie $c = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{8}i$.

14. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - z + c = 0$.
    (b) Montrer que l'une des solutions est de module $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. On la notera α.
    (c) Montrer que $|z_1 - \alpha| = \dfrac{1}{8}$.
15. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_{n+1} - \alpha| \leqslant |z_n - \alpha| \left(|z_n - \alpha| + 2|\alpha|\right)$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|z_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{8}$.
16. En déduire que $c \in B$.

Problème 2

Soit E un ensemble. Pour toute partie A de E, on note $\overline{A}$ son complémentaire dans E. Pour toutes parties A et B de E, on définit l'ensemble $A \star B$ par :

$$A \star B = \{x \in E \mid x \notin A \text{ ou } x \notin B\}.$$

1. Soient A,B deux parties de E.
   (a) Exprimer $A \star B$ à l'aide de $\overline{A}$ et $\overline{B}$.
   (b) Exprimer $A \star B$ à l'aide de $A \cap B$.
2. Soit A une partie de E. Calculer $A \star A$, $A \star E$ et $A \star \emptyset$.
3. Soient A, B deux parties de E.
   (a) Montrer que $A \cup B = (A \star A) \star (B \star B)$.
   (b) Montrer que $A \cap B = (A \star B) \star (A \star B)$.
4. Soient A,B,C trois parties de E.
   (a) Montrer que $(A \cup B) \star C = (A \star C) \cap (B \star C)$.
   (b) Montrer que $(A \cap B) \star C = (A \star C) \cup (B \star C)$.
   (c) Montrer que $(A \star B) \star C = (A \cap B) \cup \overline{C}$.
   (d) A-t-on nécessairement $(A \star B) \star C = A \star (B \star C)$?
5. Soient A,B,C,D quatre parties de E. Montrer que :

$$(A \cap B) \star (C \cap D) = (A \star B) \cup (C \star D).$$

Problème 3

Dans tout le problème, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite réelle bornée.

Préliminaire

Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que si $A \subset B$, alors $\sup A \leqslant \sup B$.

B Définition

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle $E_n = \{u_k, k \geqslant n\}$.
   (a) Montrer que E_n admet une borne supérieure et une borne inférieure.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $s_n = \sup E_n$ et $i_n = \inf E_n$.

   (b) Montrer que (s_n) est décroissante et que (i_n) est croissante.
   (c) Montrer que les suites (s_n) et (i_n) sont convergentes. On notera dans la suite

   $$L_s = \lim_{n\to+\infty} s_n \qquad \text{et} \qquad L_i = \liminf(u) = \lim_{n\to+\infty} i_n.$$

   Le nombre L_s est appelé limite supérieure de (u_n) et aussi noté $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$. De manière analogue, L_i est appelé limite inférieure de (u_n) et noté $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2. Déterminer les suites (s_n), (i_n) ainsi que leurs limites L_s et L_i dans chacun des cas suivants :
   (a) la suite (u_n) est constante égale à 0 ;
   (b) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$;
   (c) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

C Lien avec la convergence

3. On suppose (seulement pour cette question) que $L_s = L_i$. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de (u_n). On suppose que (v_n) est convergente. Montrer alors que

   $$L_i \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n \leqslant L_s.$$

5. Montrer que si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $L_s = L_i = \ell$.
6. Montrer qu'il existe une suite extraite de (u_n) qui soit convergente et de limite L_s. *(on pourra procéder par récurrence forte)*

D Un dernier raffinement

7. On note $(v_n) = (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n) = (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que

   $$\limsup_{n\to+\infty} u_n = \max\{\limsup_{n\to+\infty} v_n, \limsup_{n\to+\infty} w_n\} \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} u_n = \min\{\liminf_{n\to+\infty} v_n, \liminf_{n\to+\infty} w_n\}.$$