Exercice 1

1. $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=1 \\ 3y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}}.$

2. On passe par la matrice augmentée du système :
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$

   Cela donne le système équivalent : $\begin{cases} 2x+y+z=1 \\ 3y+z=3 \\ 8z=12 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{1}{2} \\ z=\dfrac{3}{2} \end{cases}}.$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On considère le système à n inconnues $x_1, \dots, x_n$ donné par les n équations suivantes :
$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad x_i + \sum_{k=1}^{n} x_k = i.$$
Soit A la matrice de ce système et $a_{i,j}$ ses coefficients pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$. On notera A' la matrice augmentée du système.

   (a) Pour tout i, la i-ième équation donne $2x_i + \sum\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ k\neq i}} = i$, soit $\boxed{a_{i,j} = \begin{cases} 2 \text{ si } j=i \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}}.$

   (b) On a, après l'opération : $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + \dots + L_n$,
$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 2 & n \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} (n+1) & (n+1) & \dots & \dots & (n+1) & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & \vdots & 3 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ 1 & \dots & & 1 & 2 & n \end{pmatrix}$$

   (c) En poursuivant avec $L_1 \leftarrow \dfrac{1}{n+1} L_1$, on obtient $A' \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & \dfrac{n}{2} \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & \ddots & \vdots & 3 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ 1 & \dots & & 1 & 2 & n \end{pmatrix}.$

Puis $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour tout $i \geqslant 2$ donne : $A' \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & \frac{n}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 2-\frac{n}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & 3-\frac{n}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 & n-\frac{n}{2} \end{pmatrix}$.

(d) A' est donc de rang n, le système est de Cramer et on obtient $\boxed{\text{pour tout } i \geqslant 2 : x_i = i - \frac{n}{2}}$.

Et enfin $x_1 = \frac{n}{2} - \sum_{i=2}^{n} x_i = n + \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(n+2)}{2} = \boxed{\frac{1-n}{2}}$.