MPSI Paul Valéry *pour le 08/01/2025*

Devoir maison n° 10

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être $\boxed{\text{encadrés}}$.
La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.
Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Soit $G = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid a^2 - 5b^2 = 1\}$. On définit une loi de composition interne $\times$ sur G par :

$$\forall((a, b), (a', b')) \in G^2,\ (a, b) \times (a', b') = (aa' + 5bb', ab' + a'b).$$

1. On montre dans cette question que $(G, \times)$ est un groupe.
   (a) Vérifier que $\times$ est une loi de composition interne sur G.
   (b) Montrer que $\times$ possède un élément neutre que vous préciserez.
   (c) Montrer que $\times$ est commutative et associative.
   (d) Conclure.
2. On note $t = (9, 4)$. On peut vérifier que t est un élément de G. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $(a_n, b_n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ tel que $t^n = (a_n, b_n)$.
   (a) Montrer que $(a_0, b_0) = (1, 0)$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{n+1} = 9a_n + 20b_n \\ b_{n+1} = 4a_n + 9b_n \end{cases}$.
   (b) Montrer $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq b_n < a_n$.
   (c) En déduire $\forall n \in \mathbb{N},\ 13b_n < b_{n+1}$, puis que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, de limite $+\infty$.
3. Soit $g = (a, b) \in G$ tel que $0 < b$.
   (a) Montrer que $b \geq 4$.
   (b) Justifier l'existence d'un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $b_k \leq b < b_{k+1}$.
   (c) En déduire : $0 \leq ba_k - ab_k < b_{k+1}a_k - a_{k+1}b_k = 4$.
   Indication : On pourra commencer par montrer : $\left(\dfrac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right)^2 - 5 < \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - 5 \leq \left(\dfrac{a_k}{b_k}\right)^2 - 5$.
   (d) En déduire $g = t^k$.
4. Déduire des questions précédente que $G = \{t^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Problème 2

On note $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ l'ensemble défini par :

$$\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\right\}.$$

Dans ce problème on pourra utiliser sans démonstration que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1. Montrer que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
2. (a) L'anneau $\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right], +, \times\right)$ est-il un corps ?

(b) On pose $x_0 = 1 + \sqrt{2}$. Montrer que x_0 est un élément inversible de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

On note $\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\right)^{\times}$ l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

3. Montrer que $\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\right)^{\times}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.
4. On considère l'application Φ définie par :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\right)^{\times} \\ n & \longmapsto & x_0^n \end{array} .$$

   (a) Montrer que Φ est bien définie.

   (b) Montrer que Φ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ vers $\left(\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]\right)^{\times}, \times\right)$.

   (c) Déterminer le noyau de Φ. Φ est-elle injective ?

   (d) Φ est-il un isomorphisme de groupes ?
5. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $0 < x_0^n < \varepsilon$.

   (b) Soit $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $s < t$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ tel que $s < x < t$.

   (c) Montrer que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ est dense dans $\mathbb{R}$.
6. On note $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ l'ensemble défini par $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\right\}$. Montrer que $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ est un sous-corps de $(\mathbb{R}, +, \times)$.