TD B4. Continuité et dérivabilité

1 Limites

Exercice B4.1 ✲

Montrer à l'aide de la définition seulement que $x \mapsto x^2 + 2x$ a pour limite 3 quand x tend vers 1.

Exercice B4.2 ✲

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodiques qui convergent en $+\infty$.

Exercice B4.3 ✲

Montrer que $\dfrac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$ n'a pas de limite quand $x \to +\infty$.

Exercice B4.4 ✲

Calculer les limites suivantes.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(\ln x))^2 - \cos^5 x + \ln x}{2^x - 50x^6}$;

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln x}$;

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to0} x\sin(1/x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\sin(1/x)$;

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/3} \frac{\sqrt{3}\cos x - \sin x}{x-\pi/3}$.

2 Continuité

Exercice B4.5 ✲

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x^x \text{ si } x > 0 \\ \dfrac{xe^x}{1-e^x} \text{ si } x < 0 \end{cases}$. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Exercice B4.6 ✲

Étudier la continuité et l'éventuel prolongement par continuité des fonctions suivantes.

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x^3+1} \end{array}$,

2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$,

3. $h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-1,1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2} \end{array}$.

Exercice B4.7 ✲

Montrer que la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ n'est continue en aucun point. On rappelle que $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Exercice B4.8 ✲

Montrer que deux fonctions continues qui coïncident sur $\mathbb{Q}$ coïncident sur $\mathbb{R}$.

Exercice B4.9 ✿

1. Trouver toutes les fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que $f(x^2) = f(x)$.
2. Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telles que $f(3x) = f(x)$.

Exercice B4.10 ✿✿

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 1 telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\dfrac{x+3}{4}\right)$.

Exercice B4.11 ✿✿

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice B4.12 ✿

Montrer qu'il existe à tout instant deux points diamétralement opposés sur l'équateur où les températures sont égales.

3 Dérivabilité

Exercice B4.13

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en a. Déterminer $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a+h^2)}{h}$.

Exercice B4.14

Déterminer les ensembles de définition, de continuité et de dérivabilité de f, montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0 et étudier la dérivabilité de ce prolongement avec

(i) $f(x) = x\sin(1/x)$;

(ii) $f(x) = \dfrac{x^4}{e^x - 1}$.

Exercice B4.15 ✿

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = e^{-1/x}$ et $g(x) = f(x)/x$.

1. Montrer que f et g sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $x > 0$, on a $xf'(x) = g(x)$.
2. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement est dérivable en 0.
3. Faire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice B4.16 ✿✿

Soit $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x) - 1}{\sin x} \text{ si } x \in]0, \pi/2] \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. Étudier la continuité puis la dérivabilité de f en 0.

Exercice B4.17 ✿

Montrer que $x \mapsto x^x$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?

Exercice B4.18 ✿

1. Exprimer la dérivée de $x \mapsto \ln|x|$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 \ln|x|$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice B4.19 ✿

Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ ax^2 + bx + c \text{ sinon} \end{cases}$ soit continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice B4.20 ✿

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} (x^x)^x \text{ si } x > 0 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer f'.
2. f est-elle $\mathcal{C}^1$? deux fois dérivable ?

Exercice B4.21 ✿✿

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $f'(b) < 0 < f'(a)$. Montrer que f' s'annule sur $]a, b[$.

Exercice B4.22 ✿ *(Rolle généralisé)*

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice B4.23 ✿

Soit $a \in \mathbb{R}$, $h > 0$ et f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer qu'il existe $c \in]a, a + 2h[$ tel que

$$f(a + 2h) - 2f(a + h) + f(a) = h^2 f''(c).$$

Exercice B4.24 ✿✿

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^n([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que f s'annule en au moins n points $a_1, \ldots, a_n$.

1. Soit $x \in [a, b] \setminus \{a_i \mid i \in [\![1, n]\!]\}$.
   (a) Déterminer $A \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi : t \mapsto f(t) - A\prod\limits_{i=1}^{n}(t - a_i)$ s'annule en x.
   (b) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(x) = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!} \prod\limits_{i=1}^{n}(x - a_i)$.
2. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [a, b],\ |f(x)| \leqslant \frac{M}{n!} \prod_{i=1}^{n} |x - a_i|.$$

Exercice B4.25 ✿

Calculer l'expression de $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec

(i) $f : x \mapsto \dfrac{1}{1 - x}$; (ii) $f : x \mapsto \dfrac{1}{1 - x^2}$; (iii) $f : x \mapsto x^2 e^{3x}$.

Exercice B4.26 ✿

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la dérivée n-ième de $x \mapsto \ln(1 + x)$.
2. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ la dérivée n-ième de $x \mapsto x \ln(1 + x)$.

Exercice B4.27 ✲

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la dérivée n-ième de

1. $x \mapsto (x-1)e^{-x}$,
2. $x \mapsto x^{n-1}\ln(x)$,
3. $x \mapsto x^n e^x$.

Exercice B4.28 ✲

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer de deux manières la dérivée n-ième de $x \mapsto x^{2n}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice B4.29 ✲✲

Soit $f : x \mapsto e^{x\sqrt{3}}\sin(x)$. Pour tous $n \in \mathbb{N}$, déterminer $A, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = Ae^{x\sqrt{3}}\sin(x+\varphi).$$

Exercice B4.30 ✲

Soit (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{e^{u_n}+1} \end{cases}$.

1. Montrer que (u_n) est à valeurs dans $[0,1]$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in [0,1]$ tel que $\dfrac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1} = \alpha$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1}-\alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)|u_n - \alpha|$ puis en déduire la limite de (u_n).

Exercice B4.31 ✲

À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right)$.

Exercice B4.32 ✲

1. À l'aide d'un théorème des accroissements finis, montrer que $\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$,

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leqslant \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leqslant \frac{1}{k\ln(k)}.$$

2. En déduire que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln(k)}\right)_{n>2}$ est divergente.