

Programme de colle 13 : du 06/01 au 10/01/25

Anneaux, corps

- Anneaux : définition, exemples, règles de calcul (dont binôme de Newton et formule de Bernoulli), sous-anneaux, morphismes d'anneaux.
- Élément inversible, diviseur de zéro, anneau intègre.
- Élément nilpotent, ordre (ou indice) de nilpotence.
- Corps : définition, exemples, sous-corps.

Exercices abordés dans le TD C2 : 1, 2, 3, 4, 8, 11, 14, 15.

Continuité, dérivabilité

- Limites d'une fonction : définitions de limite et continuité en un point, à droite, à gauche, prolongement par continuité.
- Opérations sur les limites, inégalités, gendarmes, caractérisation séquentielle.
- Fonctions continues sur un intervalle, opérations, théorèmes des valeurs intermédiaires et des bornes atteintes. Une fonction continue injective est strictement monotone.
- Dérivabilité, à droite à gauche, équation de la tangente, DL1.
- Calcul de dérivées et dérivées successives, classe \mathcal{C}^k , formule de Leibniz.
- Théorèmes de Rolle, des accroissements finis (égalité et inégalité), limite de la dérivée.

Exercices abordés dans le TD B4 : 1, 6, 9, 11, 12, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32.

Questions de cours

- L'ensemble des inversibles d'un anneau A est un groupe.
- Si $a \in A$ est nilpotent : inversibilité et inverse de $1_A - a$ (on peut indiquer de factoriser $1_A - a^n$ pour $n \in \mathbb{N}$).
- Si $a, b \in A$ commutent : nilpotence de ab (resp. $a + b$) sous l'hypothèse que a (resp. a et b) sont nilpotents.
- Existence d'un point fixe pour $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue.
- Théorème des bornes atteintes (avec sa démonstration).
- Continuité, dérivabilité, classe \mathcal{C}^1 de $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Remarques

- Les anneaux et corps peuvent faire l'objet d'une question de cours ou d'un exercice rapide, mais on essaiera d'aborder le chapitre d'analyse de manière significative.
- Les fonctions à valeurs complexes ont été évoquées.
- En plus du savoir-faire, il est important de savoir énoncer les définitions des notions ou les théorèmes employés.
- La logique est distillée au fil des premiers chapitres, quand cela se présente. Notamment, on n'a pas rencontré de raisonnement par analyse-synthèse, ni détaillé la manipulation des implications et de la contraposée.

Recommandations générales

La colle commencera par une question de cours. On vérifiera également au fil des exercices que le cours est maîtrisé. Si c'est le cas, la note finale est à deux chiffres. Sinon, impossible de dépasser 10.

Meilleurs vœux !