DEVOIR MAISON N° 11

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.
La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.
Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

A L'inégalité de base

Soit a, b des nombres réels tels que $0 < a < b$.

1. Après en avoir soigneusement vérifié les hypothèses, montrer, à l'aide du théorème des accroissements finis pour la fonction ln sur l'intervalle $[a, b]$ que

$$\frac{b-a}{b} < \ln(b) - \ln(a) < \frac{b-a}{a}. \tag{1}$$

2. On se propose dans cette question de démontrer cette relation d'une autre manière.
   (a) Montrer que $\forall t \in [a, b],\ \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{a}$.
   (b) En déduire que $\dfrac{b-a}{b} \leqslant \ln(b) - \ln(a) \leqslant \dfrac{b-a}{a}$.
   (c) À l'aide d'un argument d'intégrales, obtenir les inégalités strictes (on pourra se contenter de détailler une des deux inégalités).

B Première application

3. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et deux fois dérivable sur $]0, 1[$. On suppose que $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) > 0 > f'(1)$ et $\forall x \in]0, 1[,\ f''(x) < 0$.
   (a) Montrer qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\forall x \in [0, \alpha[,\ f'(x) > 0$.
   (b) Montrer que $f(\alpha) > 0$.
   (c) On suppose qu'il existe $\beta \in]0, 1[$ tel que $f(\beta) = 0$. Montrer qu'il existe $c_1 \in]0, \beta[$ et $c_2 \in]\beta, 1[$ tels que $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$.
   (d) En déduire une contradiction puis donner le signe de $f(x)$ sur $]0, 1[$.
4. Soit a, b des nombres réels tels que $0 < a < b$. Soit $g : x \mapsto \ln(xa + (1-x)b) - x\ln(a) - (1-x)\ln(b)$.
   (a) Montrer à l'aide de (1) que la fonction g vérifie toutes les hypothèses de la question 3.
   (b) En déduire que pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\ln(xa + (1-x)b) > x\ln(a) + (1-x)\ln(b).$$

   Donner une interprétation graphique de cette inégalité *(indication : on pourra essayer de poser $x = \frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$ pour se donner des idées).*

C Deuxième application

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer à l'aide de (1) que
$$\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln(k) < \frac{1}{k}.$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. Montrer que (S_n) est convergente et déterminer sa limite.

D Un peu plus loin

7. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 2$. Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que
$$\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) = \frac{1}{(k+c)\ln(k+c)}.$$

8. En déduire que
$$\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) < \frac{1}{k\ln(k)}.$$

9. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$. Montrer que (T_n) diverge vers $+\infty$.