Sol B4.
Continuité et dérivabilité

Exercice B4.2

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodiques qui convergent en $+\infty$.

Analyse. Soit f une telle fonction, notons ℓ sa limite en $+\infty$ et T sa période (positive). $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x + nT)$.
On fait tendre n vers $+\infty$. On a alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ell$. Donc f est constante.

Synthèse. Les fonctions constantes sont périodiques et convergent en $+\infty$.

Conclusion : les solutions du problème sont les fonctions constantes.

Exercice B4.3 ✿

Montrons que $f : x \mapsto \dfrac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$ n'a pas de limite quand $x \to +\infty$ en exhibant deux suites de valeurs avec des comportements différents.

- D'une part, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \dfrac{n^n}{n^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{n^n} \\ &\geqslant \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n^n} \text{ car } n \leqslant n + \frac{1}{2} \\ &\geqslant \frac{n^n n^{\frac{1}{2}}}{n^n} \\ &\geqslant n^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Donc $f\left(n + \dfrac{1}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par comparaison.

Finalement, f n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice B4.4

(i) $\dfrac{(\ln(\ln x))^2 - \cos^5 x + \ln x}{2^x - 50x^6} = \dfrac{\ln x}{2^x} \underbrace{\left(\quad \dots \quad \right)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{0}$.

(ii) Multiplier numérateur et dénominateur par $x - 1$ pour faire apparaître deux taux d'accroissement en $x \to 1$. On peut aussi poser $x = 1 + h$ et raisonner en $h \to 0$. Cela donne $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{2 - x^2} - 1}{\ln x} = \boxed{-1}$.

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to0} x \sin(1/x) = \boxed{0}$ par encadrement et $\forall x \neq 0$, $x \sin(1/x) = \dfrac{\sin(1/x)}{1/x}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \sin(1/x) = \boxed{1}$ par composition de limites.

(iv) $\dfrac{\sqrt{3} \cos x - \sin x}{x - \pi/3} = -2 \dfrac{\sin(x - \pi/3)}{x - \pi/3} \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{3}]{} \boxed{-2}$.

Exercice B4.5

- $\forall x > 0,\ f(x) = x^x = e^{x\ln(x)}$. Or $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ (croissances comparées). Donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$.
- $\forall x < 0,\ f(x) = \dfrac{xe^x}{1-e^x} = -\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)e^x$. Or $\dfrac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ (taux d'accroissement).
  Donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -1$.

On ne peut donc pas prolonger f par continuité en 0.

Exercice B4.6

Étudier la continuité et l'éventuel prolongement par continuité des fonctions suivantes.

1. f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $\forall x \neq -1,\ f(x) = \dfrac{1}{x^2-x+1} \xrightarrow[x\to -1]{} \dfrac{1}{3}$ donc f est prolongeable par continuité en -1 par la valeur $\dfrac{1}{3}$.
2. g est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc g est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0.
3. h est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. h a une limite infinie en -1^+ et en -1^-. Donc h n'est par prolongeable par continuité en 0.
   $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ h(x) = \dfrac{x-1}{1-x^2} = \dfrac{-1}{1+x} \xrightarrow[x\to 1]{-\frac{1}{2}}$ donc h est prolongeable par continuité en 1 par la valeur $-\dfrac{1}{2}$.

Exercice B4.9

1. **Analyse** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in [0,1],\ f(x^2) = f(x)$.
   Soit $x \in [0,1[$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x^{2^n}) = f(x)$.
   L'initialisation est vraie car $f(x) = f(x)$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $f(x^{2^n}) = f(x)$.
   Alors $f(x) = f(x^{2^n}) = f\left((x^{2^n})^2\right) = f\left(x^{2^n}\times 2\right) = f\left(x^{2^n+1}\right)$.
   Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = f(x^{2^n})$.
   Par passage à la limite et continuité de f, $f(x) = f(0)$. Donc f est constante sur $[0,1[$.
   Finalement, par continuité, f est également constante sur $[0,1]$.

   Synthèse Les fonctions constantes sont continues et vérifient bien $\forall x \in [0,1],\ f(x^2) = f(x)$.

   Trouver toutes les fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telles que $f(x^2) = f(x)$.
2. Même jeu avec $f(x) = f\left(\dfrac{x}{3^n}\right)$.

Exercice B4.22 (Rolle généralisé)

Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$.

- Si f est constante, tout $c \in [a,+\infty[$ convient.
- Sinon, il existe $x \in]a,+\infty[$, $f(x) \neq f(a)$.
  Soit γ strictement compris entre $f(a)$ et $f(x)$.
  Par théorème des valeurs intermédiaires sur $[a,x]$ d'une part et d'autre part sur $[x,+\infty[$ (voir exercice 9.3) : il existe $c_1 \in]a,x[$ et $c_2 \in]x,+\infty[$ tels que $f(c_1) = f(c_2) = \gamma$. On peut alors appliquer le théorème de Rolle à f, continue sur $[c_1,c_2]$ et dérivable sur $]c_1,c_2[$.

Dans tous les cas, il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice B4.27

Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la dérivée n-ième de

1. Soit $g : x \mapsto x - 1$ et $h : x \mapsto e^{-x}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $h^{(k)} : x \mapsto (-1)^k e^{-x}$ (récurrence).
   De plus, pour tout $k > 1$, $g^{(k)}$ est la fonction nulle.
   Leibniz : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x) = (-1)^n (x-1)e^{-x} + (-1)^{n-1} n e^{-x}$. Donc $f^{(n)}(x) = (-1)^n (x - 1 - n)e^{-x}$.
3. Soit $g : x \mapsto x^n$ et $h : x \mapsto e^x$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $h^{(k)} : x \mapsto e^x$.
   De plus, pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, $g^{(k)} : x \mapsto \dfrac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$ (récurrence).
   Leibniz : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \binom{n}{k}^2 x^{n-k} \right) e^x \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \binom{n}{k}^2 x^k \right) e^x.
\end{aligned}$$

Exercice B4.28

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : x \mapsto x^{2n}$.

D'une part, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(2n)!}{n!} x^n$.

D'autre part, $f(x) = x^n x^n$ et donc (formule de Leibniz) $f^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 n! x^n$.

En évaluant en $x = 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.