Problème 1

1. (a) Soit $(a,b),(a',b') \in G$. Posons $(x,y) = (a,b)\times(a',b')$. On doit montrer $(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ et $x^2-5y^2 = 1$.
   - On a déjà $x = aa'+5bb' \in \mathbb{Z}$ et $y = ab'+a'b \in \mathbb{Z}$. Comme $a^2-5b^2 = 1$, $a^2 = 1+5b^2 \geqslant 5b^2$. Donc, comme $a \in \mathbb{N}$, $|b|\sqrt{5} \leqslant a$. De même $|b'|\sqrt{5} \leqslant a'$. Ainsi, par produit $5|bb'| \leqslant aa'$. On en déduit $-5bb' \leqslant aa'$ et donc $x = aa'+5bb' \in \mathbb{N}$. Ainsi $(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$.
   - $x^2-5y^2 = (aa'+5bb')^2-5(ab'+a'b)^2 = (aa')^2+10aa'bb'+25(bb')^2-5(ab')^2-10aa'bb'-5(a'b)^2 = (a^2-5b^2)((a')^2-5(b')^2) = 1$.

   $\boxed{\times \text{ est une loi de composition interne sur } G}$.

   (b) On vérifie que $(1,0)$ est l'élément neutre de $\times$ sur G. En effet, si $(a,b) \in G$, on a bien

   $$(a,b)\times(1,0) = (a,b) = (1,0)\times(a,b).$$

   $\boxed{(1,0) \text{ est l'élément neutre de } \times \text{ sur } G.}$.

   (c) Soit $(a,b),(a',b'),(a'',b'') \in G$.
   - Comme $+$ et $\times$ sont commutatives sur $\mathbb{Z}$, on a

     $$(a,b)\times(a',b') = (aa'+5bb',ab'+ba') = (a'a+5b'b,a'b+b'a) = (a',b')\times(a,b).$$

     Donc $\times$ est commutative sur G.
   - De plus

     $$\begin{aligned}
     \big((a,b)\times(a',b')\big)\times(a'',b'') &= (aa'+5bb',ab'+ba')\times(a'',b'')\\
     &= (aa'a''+5bb'a''+5ab'b''+5ba'b'',aa'b''+5bb'b''+ab'a''+ba'a'')\\
     (a,b)\times\big((a',b')\times(a'',b'')\big) &= (a,b)\times(a'a''+5b'b'',a'b''+b'a'')\\
     &= (aa'a''+5ab'b''+5ba'b''+5bb'a'',aa'b''+ab'a''+ba'a''+5bb'b'')\\
     &= \big((a,b)\times(a',b')\big)\times(a'',b'')
     \end{aligned}$$

     Donc $\times$ est associative sur G.

   $\boxed{\times \text{ est commutative et associative sur } G}$.

   (d) Il reste à montrer que tout élément de G possède un inverse pour $\times$. Soit $(a,b) \in G$. On pose $(a',b') = (a,-b)$. Comme $(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$, $(a',b') \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$, et comme $a^2-5b^2 = 1$, $(a')^2-5(b')^2 = 1$. Donc on a bien $(a',b') \in G$. De plus

   $$(a,b)\times(a',b') = (aa'+5bb',ab'+ba') = (a^2-5b^2,-ab+ba) = (1,0).$$

   Comme $\times$ est commutative, on a aussi $(a',b')\times(a,b) = (1,0)$. On a donc montré que (a,b) est inversible pour la loi $\times$ et $(a,b)^{-1} = (a,-b)$. Donc

   $\boxed{(G,\times) \text{ est un groupe commutatif}}$.

2. (a) Par définition, $t^0 = (1,0)$, donc $(a_0, b_0) = (1,0)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = t^{n+1} = t^n \times t = (a_n, b_n) \times (9,4) = (9a_n + 20b_n, 4a_n + 9b_n)$$

Donc

$$\boxed{(a_0, b_0) = (1,0) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = 9a_n + 20b_n \\ b_{n+1} = 4a_n + 9b_n \end{cases}}.$$

(b) On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant b_n < a_n$.

Init. On a $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, donc $0 \leqslant b_0 < a_0$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant b_n < a_n$. On a alors $0 < 4a_n < 9a_n$ et $0 \leqslant 9b_n \leqslant 20b_n$, d'où, par somme, $0 < 4a_n + 9b_n < 9a_n + 20b_n$, et donc $0 < b_{n+1} < a_{n+1}$.

D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant b_n \leqslant a_n}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $13b_n = 4b_n + 9b_n < 4a_n + 9b_n = b_{n+1}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 13b_n < b_{n+1}}.$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant b_n$, on en déduit $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \leqslant 13b_n < b_{n+1}$.
Donc $\boxed{\text{la suite } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante}}$. Comme $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels strictement croissante, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \geqslant n$, donc par théorème de comparaison,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty}.$$

3. (a) On raisonne par l'absurde. Si $b < 4$, alors comme $b \in \mathbb{Z}$, $b \in \{1,2,3\}$. Or

- Si $b = 1$, $a^2 = 1 + 5b^2 = 6$.
- Si $b = 2$, $a^2 = 1 + 5b^2 = 21$.
- Si $b = 3$, $a^2 = 1 + 5b^2 = 46$.

Dans tous les cas, on obtient une contradiction car 6, 21 et 46 ne sont pas des carrés de nombres entiers. Donc

$$\boxed{b \geqslant 4}.$$

(b) Soit $(a,b) \in G$ tel que $0 < b$. On considère l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid b_n \leqslant b\}$. Comme $b_1 = 4 \leqslant b$, on a $1 \in A$. Donc A est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$. Comme de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $b_n > b$, *i.e.* $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0 \Rightarrow b_n > b$.
Ainsi, par contraposée, $\forall n \in \mathbb{N} b_n \leqslant b \Rightarrow n < n_0$, ce qui signifie $\forall n \in A$, $n < n_0$. Donc A est majoré. A admet donc un plus grand élément k. On a donc en particulier $k \in A$ et $k+1 \notin A$; Donc

$$\boxed{\text{il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } b_k \leqslant b < b_{k+1}}.$$

(c) Remarquons déjà que $t^{k+1} \times (t^k)^{-1} = t$. Ainsi $(a_{k+1}, b_{k+1}) \times (a_k, -b_k) = (9,4)$. En particulier, $b_{k+1}a_k - a_{k+1}b_k = 4$. D'autre part, comme $k \geqslant 1$, on a $b_k \geqslant b_1 > 0$. On a alors $0 < b_k \leqslant b < b_{k+1}$. Ainsi, comme $x \mapsto x^{-2}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$,

$$\frac{1}{b_{k+1}^2} < \frac{1}{b^2} \leqslant \frac{1}{b_k^2}$$

Or, pour tout $(x,y) \in G$ tel que $y > 0$, on a $x^2 - 5y^2 = 1$, donc $\dfrac{1}{y^2} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - 5$. On en déduit alors successivement, comme toutes les variables sont strictement positives,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right)^2 - 5 < \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5 &\leqslant \left(\frac{a_k}{b_k}\right)^2 - 5 \\
\left(\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right)^2 < \left(\frac{a}{b}\right)^2 &\leqslant \left(\frac{a_k}{b_k}\right)^2 \\
\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} < \frac{a}{b} &\leqslant \frac{a_k}{b_k} \\
\frac{a_{k+1}b_k}{b_{k+1}} < \frac{ab_k}{b} &\leqslant a_k \\
\frac{a_{k+1}b_k - b_{k+1}a_k}{b_{k+1}} < \frac{ab_k - ba_k}{b} &\leqslant 0 \\
0 \leqslant \frac{ba_k - ab_k}{b} < \frac{b_{k+1}a_k - a_{k+1}b_k}{b_{k+1}}&
\end{aligned}$$

Enfin, comme $0 \leqslant b < b_{k+1}$, on en déduit que

$$\boxed{0 \leqslant ba_k - ab_k < b_{k+1}a_k - a_{k+1}b_k = 4}.$$

(d) Considérons $g' = g \times t^{-k}$ et posons $(a', b') = g'$. Par définition, $g' \in G$ et on a

$$g' = g \times (t^k)^{-1} = (a,b) \times (a_k, -b_k) = (aa_k - 5bb_k, ba_k - ab_k).$$

Donc $a' = aa_k - 5bb_k$ et $b' = ba_k - ab_k$. On raisonne alors par l'absurde et on suppose $b' = ba_k - ab_k \neq 0$. Alors, d'après la question précédente, $0 < b' < 4$. Mais, d'après la question 3.1, comme $b' > 0$, on doit avoir $b' \geqslant 4$ ce qui est contradictoire. Donc nécessairement $b' = ba_k - ab_k = 0$. On en déduit alors $(a')^2 = 1 + (b')^2 = 1$, car $g' \in G$. Ainsi $a' = 1$, car $a' \in \mathbb{N}$. On a donc montré $g' = (1,0)$. Comme $(1,0)$ est l'élément neutre de G, on en déduit $\boxed{g = t^k}$.

4. Comme G est un groupe et $t \in G$, on a $\left\{t^k \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \subset G$, par définition des puissances d'un élément d'un groupe. Réciproquement, considérons un élément $g = (a,b) \in G$. On distingue trois cas :
   - Si $b > 0$, alors d'après la question 3, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $g = t^k$.
   - Si $b = 0$, alors $a^2 = 1 + b^2 = 1$, donc $a = 1$. Ainsi $g = (1,0) = t^0$.
   - Si $b < 0$, alors $g^{-1} = (a, -b)$ et $-b > 0$. Ainsi, d'après la question 3, il existe $l \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^{-1} = t^l$. On a alors $g = t^{-l} = t^k$ avec $k = -l$.

   On a montré dans tous les cas l'existence d'un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $g = t^k$. D'où

$$\boxed{G = \left\{t^k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}}.$$

Problème 2

1. Commençons par montrer que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
   - Par définition de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, on a $\boxed{\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \subset \mathbb{R}}$.

- On a $0 = a + b\sqrt{2}$ pour $a = b = 0$. Donc $\boxed{0 \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]}$.
- Soit $x, x' \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$. Il existe alors $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a + b\sqrt{2}$ et $x' = a' + b'\sqrt{2}$. On a alors

$$x + x' = (a + a') + (b + b')\sqrt{2}.$$

Comme $a + a' \in \mathbb{Z}$ et $b + b' \in \mathbb{Z}$, on en déduit que $x + x' \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$. Donc $\boxed{\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \text{ est stable par } +}$.

- Soit $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$. Il existe alors $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a + b\sqrt{2}$. On a alors $-x = (-a) + (-b)\sqrt{2}$. Comme $-a \in \mathbb{Z}$ et $-b \in \mathbb{Z}$, on en déduit que $-x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

Donc $\boxed{\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \text{ est stable par passage à l'opposé}}$.

On a donc montré que $\boxed{\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{R}, +)}$.

Il reste à montrer que $1 \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ et que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ est stable par $\times$.

- On a $1 = a + b\sqrt{2}$ pour $a = 1$ et $b = 0$. Donc $\boxed{1 \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]}$.
- Soit $x, x' \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$. Il existe alors $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a + b\sqrt{2}$ et $x' = a' + b'\sqrt{2}$. On a alors

$$x \times x' = (aa' + 2bb') + (ab' + ba')\sqrt{2}.$$

Comme $aa' + 2bb' \in \mathbb{Z}$ et $ab' + ba' \in \mathbb{Z}$, on en déduit que $x \times x' \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

Donc $\boxed{\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \text{ est stable par } \times}$.

Finalement,

$$\boxed{\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \text{ est un sous-anneau de } (\mathbb{R}, +, \times)}.$$

2. (a) $\boxed{\text{Un élément } x \in A \text{ est inversible si } \exists y \in A,\ x \times y = 1_A = y \times x}$.

(b) Montrons que 2 n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, ce qui prouvera que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ n'est pas un corps. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $2\left(a + b\sqrt{2}\right) = 1$. On a alors $2b\sqrt{2} = 1 - 2a$. Si $b \neq 0$, alors $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde. Donc nécessairement $b = 0$ et alors $2a = 1$, ce qui est aussi absurde puisque $a \in \mathbb{Z}$. Donc 2 n'est pas inversible. Finalement,

$$\boxed{\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \text{ n'est pas un corps}}.$$

(c) Soit $y_0 = -1 + \sqrt{2}$. On a $y_0 \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ et $x_0 y_0 = \left(1 + \sqrt{2}\right)\left(-1 + \sqrt{2}\right) = -1 + 2 = 1$. Donc

$$\boxed{x_0 = 1 + \sqrt{2} \text{ est inversible dans } \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]}.$$

3. Montrons que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]^{\times}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

- On a $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \subset \mathbb{R}$. Comme 0 n'est pas inversible, $\boxed{\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]^\times \subset \mathbb{R}^*}$.
- 1 est inversible dans $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, donc $\boxed{1 \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]^\times}$.
- Soit $x, y \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]^\times$. On a alors $x, y \in \mathbb{R}^*$ et $x^{-1}, y^{-1} \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$. De plus $(xy) \times (x^{-1}y^{-1}) = 1$. Comme $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ est stable par $\times$, $x^{-1}y^{-1} \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, donc xy est inversible dans $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ et
$$\boxed{\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]^\times \text{ est stable par } \times}/$$
- Soit $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]^\times$. Alors $x \in \mathbb{R}^*$ et $x^{-1} \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$. Comme $x \times x^{-1} = 1$ et $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, on en déduit que x^{-1} est inversible dans $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, et $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$. Ainsi $\boxed{x^{-1} \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]^\times}$.

Finalement,
$$\boxed{\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]^\times \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{R}^*, \times)}.$$

4. (a) On a $x_0 \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$. D'après la question précédente, $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]^\times$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$. Ainsi
   - $x_0^0 = 1 \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]^\times$.
   - $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]^\times$ est stable par $\times$, donc par récurrence immédiate $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_0^n \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]^\times$.
   - $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]^\times$ est stable par passage à l'inverse. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_0^{-n} = (x_0^n)^{-1} \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]^\times$.

   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\Phi(n) \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]^\times$. Donc $\boxed{\Phi \text{ est bien définie}}$.

   (b) Soit $n, m \in \mathbb{Z}$. On a :
$$\Phi(n+m) = x_0^{n+m} = x_0^n \times x_0^m = \Phi(n) \times \Phi(m).$$
   Donc $\boxed{\Phi \text{ est un morphisme de groupes}}$.

   (c) Par définition, le noyau de Φ est $\boxed{\operatorname{Ker}\Phi = \{n \in \mathbb{Z} \mid \Phi(n) = 1\}}$.
   Soit $n \in \mathbb{Z}$. Comme $x_0 \in]0, +\infty[$ et $x_0 \neq 1$, on a
$$\Phi(n) = 1 \Leftrightarrow x_0^n = 1 \Leftrightarrow n \ln x_0 = 0 \Leftrightarrow n = 0$$
   On en déduit :
$$\boxed{\operatorname{Ker}\Phi = \{0\}}.$$
   Or par théorème de cours, un morphisme de groupe est injectif $\Leftrightarrow$ son noyau ne contient que l'élément neutre. Donc $\boxed{\Phi \text{ est injective}}$.

   (d) Comme $x_0 > 0$, on a $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\Phi(n) = x_0^n > 0$. Or -1 est un élément inversible de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$. Donc $-1 \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]^\times$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $-1 \neq \Phi(n)$. Donc
$$\boxed{\Phi \text{ n'est pas surjective, donc } \Phi \text{ n'est pas un isomorphisme de groupes}}.$$

5. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Comme $x_0 > 1$, on a

$$x_0^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \ln x_0 < \ln \varepsilon \Leftrightarrow n < \frac{\ln \varepsilon}{\ln x_0}.$$

Ainsi $n = \left\lfloor \frac{\ln \varepsilon}{\ln x_0} \right\rfloor - 1 \in \mathbb{Z}$ convient. Donc

$$\boxed{\exists n \in \mathbb{Z},\ 0 < x_0^n < \varepsilon}.$$

(b) Soit $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ tel que $s < t$. On pose $\varepsilon = t - s > 0$. D'après la question précédente, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $0 < x_0^n < \varepsilon$. On pose alors $p = \left\lfloor \frac{s}{x_0^n} \right\rfloor + 1$. Par définition de la partie entière d'un nombre réel, on a alors $p - 1 \leq \frac{s}{x_0^n} < p$. D'où $(p-1)x_0^n \leq s < px_0^n$. De la première inégalité on en déduit $px_0^n - x_0^n \leq s$, d'où $px_0^n \leq s + x_0^n < s + \varepsilon = t$. Ainsi, on a $s < px_0^n < t$. Enfin, comme $p \in \mathbb{Z}$ et $x_0^n \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, $x = px_0^n \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$. Donc

$$\boxed{\exists x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right],\ s < x < t}.$$

(c) $\boxed{\text{Soit } A \text{ une partie de } \mathbb{R}.\ A \text{ est dense dans } \mathbb{R} \text{ si pour tout intervalle véritable } I,\ A \cap I \neq \emptyset}$.

Montrons que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit I un intervalle véritable. Il existe alors $s, t \in I$ tels que $s < t$. D'après la question précédente il existe $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ tel que $s < x < t$. Comme I est un intervalle, on en déduit $x \in I$.

Donc $x \in I \cap \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ et $I \cap \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \neq \emptyset$. Donc $\boxed{\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \text{ est dense dans } \mathbb{R}}$.

6. On commence par montrer que $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.

- Par définition de $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$, on a $\boxed{\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] \subset \mathbb{R}}$.
- On a $0 = a + b\sqrt{2}$ pour $a = b = 0$. Donc $\boxed{0 \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]}$.
- Soit $x, x' \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$. Il existe alors $a, b, a', b' \in \mathbb{Q}$ tels que $x = a + b\sqrt{2}$ et $x' = a' + b'\sqrt{2}$. On a alors
$$x + x' = (a + a') + (b + b')\sqrt{2}.$$
Comme $a + a' \in \mathbb{Q}$ et $b + b' \in \mathbb{Q}$, on en déduit que $x + x' \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$. Donc $\boxed{\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] \text{ est stable par } +}$.
- Soit $x \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$. Il existe alors $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $x = a + b\sqrt{2}$. On a alors $-x = (-a) + (-b)\sqrt{2}$. Comme $-a \in \mathbb{Q}$ et $-b \in \mathbb{Q}$, on en déduit que $-x \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$.
Donc $\boxed{\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] \text{ est stable par passage à l'opposé}}$.

On a donc montré que $\boxed{\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{R}, +)}$.

Il reste à montrer que $1 \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ et que $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ est stable par $\times$.

- On a $1 = a + b\sqrt{2}$ pour $a = 1$ et $b = 0$. Donc $\boxed{1 \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]}$.
- Soit $x, x' \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$. Il existe alors $a, b, a', b' \in \mathbb{Q}$ tels que $x = a + b\sqrt{2}$ et $x' = a' + b'\sqrt{2}$. On a alors
$$x \times x' = (aa' + 2bb') + (ab' + ba')\sqrt{2}.$$
Comme $aa' + 2bb' \in \mathbb{Q}$ et $ab' + ba' \in \mathbb{Q}$, on en déduit que $x \times x' \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$.
Donc $\boxed{\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] \text{ est stable par } \times}$.

On a donc montré que $\boxed{\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] \text{ est un sous-anneau de } (\mathbb{R}, +, \times)}$.

Pour montrer qu'il s'agit d'un sous-corps, il faut encore montrer que tout élément non nul de $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$ est inversible. Soit $x \in \mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] \setminus \{0\}$. Il existe alors $a, b \in \mathbb{Q}$ tel que $x = a + b\sqrt{2}$. De plus, $(a, b) \neq (0, 0)$. On montre alors que $a - b\sqrt{2} \neq 0$ (car sinon $\sqrt{2}$ serait rationnel). On en déduit que

$$\left(a + b\sqrt{2}\right) \times \left(a - b\sqrt{2}\right) = a^2 - 2b^2 \neq 0.$$

D'où

$$\left(a + b\sqrt{2}\right) \times \left(\frac{a}{a^2 - 2b^2} - \frac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}\right) = 1.$$

Comme $\dfrac{a}{a^2 - 2b^2} \in \mathbb{Q}$ et $\dfrac{b}{a^2 - 2b^2} \in \mathbb{Q}$, $x = a + b\sqrt{2}$ est inversible dans $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$.
Et $x^{-1} = \dfrac{a}{a^2 - 2b^2} - \dfrac{b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}$. Donc

$$\boxed{\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right] \text{ est un sous-corps de } (\mathbb{R}, +, \times)}.$$