Problème 1

A L'inégalité de base

Soit a, b des nombres réels tels que $0 < a < b$.

1. ln est continue et dérivable sur $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$. De plus sa dérivée, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante, donc $\forall t \in [a,b]$, $\dfrac{1}{a} \leqslant \ln'(t) \leqslant \dfrac{1}{b}$. D'après le théorème des accroissements finis,

$$\boxed{\frac{b-a}{b} < \ln(b) - \ln(a) < \frac{b-a}{a}}. \tag{1}$$

2. On se propose dans cette question de démontrer cette relation d'une autre manière.
   (a) Comme précédemment, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $[a,b]$.
   Donc $\boxed{\forall t \in [a,b],\ \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{a}}$.
   (b) Par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{b}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \frac{1}{a}\,\mathrm{d}t$, *i.e.* $\boxed{\dfrac{b-a}{b} \leqslant \ln(b) - \ln(a) \leqslant \dfrac{b-a}{a}}$.
   (c) $t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{b}$ est continue et positive sur $[a,b]$. De plus elle n'est pas identiquement nulle (car $a < b$), donc d'après la stricte positivité des intégrales, $\displaystyle\int_a^b \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{b}\right)\mathrm{d}t > 0$, *i.e.* $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t > \int_a^b \frac{1}{b}\,\mathrm{d}t$, *i.e.* $\boxed{\dfrac{b-a}{b} < \ln(b) - \ln(a)}$.
   L'autre inégalité s'obtient de la même manière en étudiant $t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{a}$.

B Première application

3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et deux fois dérivable sur $]0,1[$. On suppose que $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) > 0 > f'(1)$ et $\forall x \in]0,1[$, $f''(x) < 0$.
   (a) $f'(0) > 0$ et f' est continue, donc f' est positive sur un voisinage de 0.
   Autrement dit, $\boxed{\text{il existe } \alpha \in]0,1[\text{ tel que } \forall x \in [0,\alpha[,\ f'(x) > 0}$.
   (b) f est continue sur $[0,\alpha]$, dérivable sur $]0,\alpha[$ et $\forall x \in]0,\alpha[$, $f'(x) > 0$. D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à f, $f(\alpha) - f(0) > 0(\alpha - 0)$, *i.e.* $\boxed{f(\alpha) > 0}$.
   (c) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ donc vérifie *a fortiori* les hypothèses du théorème de Rolle entre 0 et β puis entre β et 1.
   Ainsi $\boxed{\text{il existe } c_1 \in]0,\beta[\text{ et } c_2 \in]\beta,1[\text{ tels que } f'(c_1) = f'(c_2) = 0}$.

(d) f' est continue sur $[c_1, c_2]$ et dérivable sur $]0,1[$, donc sur $]c_1, c_2[$, donc d'après le théorème de Rolle appliqué à f', il existe $c \in]c_1, c_2[$ tel que $f''(c) = 0$. Comme $]c_1, c_2 \subset]0,1[$, cela contredit l'hypothèse.
On a montré par l'absurde que f ne s'annule pas sur $]0,1[$. En particulier elle est de signe constant (conséquence du TVI). Comme $f(\alpha) > 0$, $\boxed{\forall x \in]0,1[,\ f(x) > 0}$.

4. Soit a, b des nombres réels tels que $0 < a < b$. Soit $g : x \mapsto \ln(xa + (1-x)b) - x\ln(a) - (1-x)\ln(b)$.
   (a) $\forall x \in [0,1]$, $xa + (1-x)b = b - x(b-a) \in [a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$.
   Et ln est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$.
   Par composition puis somme avec une fonction affine, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$, donc vérifie *a fortiori* les hypothèses de régularité de la question 3.
   De plus $\boxed{g(0) = g(1) = 0}$.
   $\forall x \in [0,1]$, $g'(x) = \dfrac{a-b}{xa + (1-x)b} - (\ln(a) - \ln(b))$, donc $g'(0) = \dfrac{a-b}{b} - (\ln(a) - \ln(b)) \boxed{> 0}$ et $g'(0) = \dfrac{a-b}{a} - (\ln(a) - \ln(b)) \boxed{< 0}$.
   Enfin, $\forall x \in [0,1]$, $g''(x) = -\dfrac{(a-b)^2}{(xa + (1-x)b)^2}$ donc $\boxed{\forall x \in]0,1[,\ f''(x) < 0}$.
   (b) D'après le travail de la question 3, $\forall x \in]0,1[$, $g(x) > 0$, *i.e.*

$$\boxed{\ln(xa + (1-x)b) > x\ln(a) + (1-x)\ln(b)}.$$

   Cela montre que la courbe de ln se situe au-dessus de la droite (la corde) reliant les points d'abscisses a et b sur sa courbe représentative. Voir les questions de convexité à venir pour plus de détails.

C Deuxième application

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En appliquant (1) avec $a = k$ et $b = k+1$, on a

$$\boxed{\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln(k) < \frac{1}{k}}.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k+1} < \sum_{k=n+1}^{2n} (\ln(k+1) - \ln(k)) < \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.
   Par télescopage, cela donne $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k+1} < \sum_{k=n+1}^{2n} (\ln(2n+1) - \ln(n+1)) < S_n$.
   Le premier membre peut se réécrire : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} = S_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$.
   Ainsi la seconde puis la première inégalité donnent

$$\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) < S_n < \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}.$$

   D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{S_n \to \ln(2)}$.

D Un peu plus loin

7. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x > 1$, $\ln(x) \in \mathbb{R}_+^*$.
   Par composition, $\ln \circ \ln$ est dérivable sur $]1, +\infty[$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geqslant 2$. Comme $[k, k+1] \in]1, +\infty[$, $\ln \circ \ln$ est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $t \in]k, k+1[$ tel que $\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) = (\ln \circ \ln)'(t)$.
   En écrivant $t = k+c$ avec $c = t-k \in]0, 1[$ et en calculant l'expression de $(\ln \circ \ln)'$, on obtient l'existence de $c \in]0, 1[$ tel que
   $$\boxed{\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) = \frac{1}{(k+c)\ln(k+c)}}.$$

8. Comme $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ est strictement décroissante sur $[k, k+1]$ (comme inverse d'une fonction strictement croissante par exemple, ou en calculant la dérivée), on a
   $$\boxed{\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) < \frac{1}{k\ln(k)}}.$$

9. Soit $n \geqslant 2$. En sommant de 2 à n, on obtient après télescopage $\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) < T_n$.
   Or $\ln(\ln(n+1)) \to +\infty$ donc par comparaison $\boxed{(T_n) \text{ diverge vers } +\infty}$.