

Programme de colle 15 : du 20/01 au 24/01

Arithmétique des entiers

- Divisibilité, diviseurs, multiples, propriétés.
- Relation de congruence modulo un entier, propriétés, résolution d'équations.
- Division euclidienne.
- PGCD, PPCM (au sens de \leq), premières propriétés.
- Algorithme d'Euclide, algorithme d'Euclide étendu, identité de Bézout.
- Caractérisation du PPCM et du PGCD par la relation de divisibilité.
- Nombres premiers entre eux, caractérisation par le théorème de Bézout, propriétés.
- Théorème de Gauß.
- Relation entre PGCD et PPCM.
- Extension des définitions au cas d'une famille finie de nombres entiers.
- Nombres premiers entre eux dans leur ensemble ou deux à deux. Propriétés de Bézout.
- Nombres premiers, cardinal infini.
- Petit théorème de Fermat.
- Décomposition primaire : existence d'un diviseur premier, d'une décomposition en produit de nombres premiers.
- Valuations p -adiques, formules, lien avec la divisibilité, calcul de PGCD, PPCM.
- Méthodes de résolution : équations modulaires du type $ax \equiv b [m]$, systèmes (théorème des restes chinois), équations diophantiennes du type $ax + by = c$.

Exercices abordés dans le TD C3 : 2, 3, 5, 11, 13, 17, 31, 37, 41, 43, 47, 67, 73.

Questions de cours

- Caractérisation des sous-groupes (additifs) de \mathbb{Z} .
- Quel est le dernier chiffre de 7^{7^7} ? (*indication éventuelle : montrer que $7^4 \equiv 1 [10]$*).
- Énoncé et démonstration du théorème de division euclidienne dans \mathbb{Z} .
- Énoncé et démonstration du petit théorème de Fermat (et du lemme de divisibilité des coefficients binomiaux dont il découle).

Remarques

- La justification de l'algorithme d'Euclide a été évoquée mais n'est pas exigible.
- En plus du savoir-faire, il est important de savoir énoncer les définitions des notions ou les théorèmes employés.
- La logique est distillée au fil des premiers chapitres, quand cela se présente. Les raisonnements par analyse-synthèse ayant désormais été abordés, les résolutions d'équations ou de problèmes doivent maintenant être bien rigoureux.

Recommandations générales

La colle commencera par une question de cours. On vérifiera également au fil des exercices que le cours est maîtrisé. Si c'est le cas, la note finale est à deux chiffres. Sinon, impossible de dépasser 10.