DEVOIR SURVEILLÉ N° 5

Les résultats devront être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1

Dans ce problème, on cherche à résoudre dans les parties B et C deux équations de Mordell, d'inconnues $x, y \in \mathbb{Z}$. Pour cela on a besoin d'un résultat qu'on démontre dans la partie A. Il est possible d'admettre ce résultat pour traiter la suite du problème. Les parties B et C sont entièrement indépendantes.

On notera $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers et, pour tout $p \in \mathbb{P}$, $\nu_p(n)$ désignera la valuation p-adique d'un nombre $n \in \mathbb{N}$. On rappelle enfin la définition suivante.

Définition 1

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On dit que n est un cube parfait s'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $n = m^3$.

A Un résultat utile

1. (a) Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Montrer que n est un cube parfait si et seulement si $\forall p \in \mathbb{P}$, $3 \mid \nu_p(n)$.
   (b) Soit $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $u \wedge v = 1$. On pose $n = uv$. Montrer que si n est un cube parfait, alors u et v sont des cubes parfaits.

B Résolution de l'équation $y^2 = x^3 + 16$

Dans cette partie, on considère l'équation $y^2 = x^3 + 16$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

2. Soit $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $y^2 = x^3 + 16$. On suppose que y est impair.
   (a) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $y + 4 = a^3$ et $y - 4 = b^3$. Justifier que a et b sont impairs. *On pourra poser $\delta = (y+4) \wedge (y-4)$ et montrer que $\delta \mid 8$, puis en déduire que $\delta = 1$ et utiliser le résultat de la partie A.*
   (b) Montrer que $a - b = 8$ puis que $b^2 + 8b + 21 = 0$. *On pourra factoriser $a^3 - b^3$ à l'aide d'une formule de cours puis déterminer la parité des deux facteur obtenus.*
   (c) Conclure.
3. Soit $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $y^2 = x^3 + 16$. On suppose que y est pair.
   (a) Montrer que x et y sont divisibles par 4. Il note alors $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $x = 4u$ et $y = 4v$.
   (b) Montrer que v est impair. Il note alors $w \in \mathbb{Z}$ tel que $v = 2w + 1$.
   (c) Montrer que w et $w + 1$ sont des cubes parfaits, puis en déduire la valeur de x.
4. En déduire l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $y^2 = x^3 + 16$.

C Résolution de l'équation $y^2 = x^3 + 7$

Dans cette partie, on considère l'équation $y^2 = x^3 + 7$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

5. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que a^2 est congru à 0, 1 ou 4 modulo 8.
6. Soit $b \in \mathbb{N}$. Montrer que si $b \equiv 3$ [4], alors b est divisible par un nombre premier p tel que $p \equiv 3$ [4]. *On pourra raisonner par l'absurde.*
7. Soit $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $y^2 = x^3 + 7$.
   (a) Montrer que x est impair, en raisonnant par l'absurde. *On pourra utiliser la question 5 pour conclure.*
   (b) Montrer que $(x-1)^2 + 3$ est divisible par un nombre premier p tel que $p \equiv 3$ [4].
   (c) Factoriser $x^3 + 8$. En déduire $y^2 \equiv -1$ $[p]$. *On pourra factoriser $x^3 + 8$ par $x + 2$ et utiliser la question précédente.*
8. En déduire l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $y^2 = x^3 + 7$. *On pourra utiliser le petit théorème de Fermat pour conclure.*

Problème 2

Soit $a < b$ deux réels. Ce problème est consacré à une généralisation du théorème des accroissements finis, la formule de Taylor-Lagrange, énoncée et démontrée en partie A, et dont deux applications sont présentées en partie B.

A Le théorème

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Theorème 1

Soit $n \in \mathbb{N}$, f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et dérivable $n + 1$ fois sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

1. Justifier que si $n = 0$, on retrouve l'égalité des accroissements finis.
2. On pose, $\forall t \in [a, b]$, $\varphi(t) = f(b) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) \right) - A \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ où $A \in \mathbb{R}$ sera à déterminer.
   (a) Vérifier que $\varphi(b) = 0$.
   (b) Montrer que l'on peut choisir $A \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(a) = \varphi(b)$. On ne cherchera pas à simplifier A.
   (c) Montrer que φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et que pour tout $t \in]a, b[$,
   $$\varphi'(t) = -\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + A \frac{(b-t)^n}{n!}$$
   (d) Démontrer alors le théorème attendu.

B Deux applications

3. La série harmonique alternée est la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

   Le but de cette question est de déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

   On considère la fonction f définie sur $I =]-1, +\infty[$ par $f : x \mapsto \ln(1+x)$.

   (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, expliciter $f^{(n)}$.

   (b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ \exists c > 0,\ \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$.

   (c) Détailler la formule précédente à l'aide des expressions des dérivées successives de f trouvées dans la question (a).

   (d) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ \left| \ln(1+x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

   (e) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$.

4. On souhaite démontrer que e n'est pas algébrique de degré 2, c'est-à-dire qu'il est impossible de trouver trois entiers a, b et c non tous nuls tels que $ae^2 + be + c = 0$. On procède par l'absurde en supposant vraie une telle relation et on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ae^x + ce^{-x}$.

   (a) Démontrer que $f(1) \in \mathbb{Z}$.

   (b) Démontrer que

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists c_{n+1} \in]0,1[,\ f(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$$

   (c) Démontrer que $\dfrac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{n+1}$ est un entier et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{n+1} = 0$.

   (d) Conclure.

Problème 3

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on dit qu'une fonction f définie sur un intervalle non trivial I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est **α-höldérienne** si et seulement si

$$\exists K \in \mathbb{R}_+,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leq K|x-y|^\alpha$$

1. Démontrer qu'une fonction α-höldérienne est continue sur I.
2. Démontrer que si I est un segment et f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors elle est 1-höldérienne.
3. Dans cette question, on prend $\alpha > 1$.

   (a) Soit f une fonction α-höldérienne et $a \in I$ fixé. Démontrer que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$.

   (b) En déduire que f est constante.

4. On considère la fonction

   $$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

   (a) Démontrer que f est $\dfrac{1}{2}$-höldérienne.

(b) Soit $\beta \in \mathbb{R}_+^* \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, démontrer que f n'est pas β-höldérienne.

5. Soit $\alpha \in]0,1]$, on considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} g_\alpha & : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x^\alpha \end{array}.$$

   (a) On pose la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi(t) = (1+t)^\alpha - t^\alpha$.

      i. Démontrer que φ est décroissante.

      ii. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(t) \leq 1$.

   (b) Déduire de l'inégalité précédente que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ 0 \leq (x+y)^\alpha - x^\alpha \leq y^\alpha$.

   (c) En déduire que g_α est α-höldérienne.

6. On considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} h & : &]0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & x\ln(x) \end{array}.$$

   (a) h est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

   (b) Montrer que h n'est pas 1-höldérienne.

   (c) Montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$, h est α-höldérienne.