Les résultats devront être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre.

$\boxed{\textbf{Problème 1}}$

1. (a) Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

   $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $n = m^3$. Comme $n \neq 0$, $m \neq 0$. Soit $p \in \mathbb{P}$. On a $\nu_p(n) = 3\nu_p(m)$, donc $3 \mid \nu_p(n)$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\forall p \in \mathbb{P}$, $3 \mid \nu_p(n)$. On décompose n en produit de facteurs premiers. Il existe un ensemble fini Q de nombres premiers et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que :
   $$n = \varepsilon \prod_{p \in Q} p^{\nu_p(n)}.$$
   Par hypothèse, pour tout $p \in \mathbb{P}$, il existe $\alpha_p \in \mathbb{N}$ tel que $\nu_p(n) = 3\alpha_p$. On pose alors $m = \varepsilon \prod_{p \in Q} p^{\alpha_p}$. On a alors :
   $$m^3 = \left(\varepsilon \prod_{p \in Q} p^{\alpha_p}\right)^3 = \varepsilon^3 \prod_{p \in Q} p^{3\alpha_p} = \varepsilon \prod_{p \in Q} p^{\nu_p(n)} = n.$$
   Donc $\boxed{n \text{ est un cube parfait si et seulement si } \forall p \in \mathbb{P},\ 3 \mid \nu_p(n)}$.

   (b) Soit $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $u \wedge v = 1$. On suppose que $n = uv$ est un cube parfait.

   - Tout d'abord, si $n = 0$, alors u ou v est nul. Quitte à échanger u et v, on peut supposer $u = 0$. Comme $u \wedge v = 1$, nécessairement $v = 1$ ou $v = -1$. Ainsi u et v sont bien des cubes parfaits.
   - Supposons $n \neq 0$. Soit $p \in \mathbb{P}$. D'après la question précédente, $3 \mid \nu_p(n)$. Comme $u \wedge v = 1$ et $n = uv$, on a $\min\{\nu_p(u), \nu_p(v)\} = 0$ et $\nu_p(u) + \nu_p(v) = \nu_p(n)$. On en déduit :
   $$\begin{cases} \nu_p(u) = 0 \\ \nu_p(v) = \nu_p(n) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \nu_p(u) = \nu_p(n) \\ \nu_p(v) = 0. \end{cases}$$
   Dans les deux cas $3 \mid \nu_p(u)$ et $3 \mid \nu_p(n)$.
   Donc, d'après la question précédente, $\boxed{u \text{ et } v \text{ sont des cubes parfaits}}$.

2. (a) Posons $\delta = (y+4) \wedge (y-4)$. δ divise alors $(y+4) - (y-4) = 8$. Or, comme y est impair, $y+4$ est impair, donc δ est nécessairement impair. Comme le seul diviseurs positif impair de 8 est 1, on en déduit $(y+4) \wedge (y-4) = 1$. D'autre part, on a $(y+4)(y-4) = y^2 - 16 = x^3$. D'après la question 1b, $\boxed{\text{il existe } a, b \in \mathbb{Z} \text{ tels que } y+4 = a^3 \text{ et } y-4 = b^3}$. Enfin, comme y est impair, $y + 4 = a^3$ et $y - 4 = b^3$ sont impairs, donc $\boxed{a \text{ et } b \text{ sont impairs}}$ aussi.

   (b) On a $8 = a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$. Or, comme $a \equiv 1\ [2]$ et $b \equiv 1\ [2]$, $a - b \equiv 0\ [2]$ et $a^2 + ab + b^2 \equiv 1\ [2]$. De plus, comme $a^3 > b^3$, $a > b$ et donc $a - b > 0$ et $a^2 + ab + b^2 > 0$. Comme le seul diviseur positif impair de 8 est 1, on en déduit $a^2 + ab + b^2 = 1$ puis $\boxed{a - b = 8}$. On obtient enfin $(b+8)^2 + (b+8)b + b^2 - 1 = 0$, *i.e.* $3(b^2 + 8b + 21) = 0$. D'où $\boxed{b^2 + 8b + 21 = 0}$.

(c) Le discriminant du trinôme $x^2+8x+21$ vaut $\Delta = 8^2-4\times 21 = -20$, donc l'équation $x^2+8x+21 = 0$ n'a aucune solution réelle, ni, *a fortiori*, entière.

$$\boxed{\text{Aucun couple } (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \text{ avec } y \text{ impair ne vérifie } y^2 = x^3+16}.$$

3. (a) Comme y est pair, il existe $t \in \mathbb{Z}$ tel que $y = 2t$. On en déduit $x^3 = 4t^2 - 16$. Ainsi x^3 est pair et donc x est pair. Il existe alors $s \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2s$. On obtient alors $4t^2 = 8s^3 + 16$, d'où $t^2 = 2s^3 + 4$. Ainsi t^2 est pair et donc t est pair. Il existe alors $v \in \mathbb{Z}$ tel que $t = 2v$. On en déduit enfin $2s^3 = 4v^2 - 4$, d'où $s^3 = 2v^2 - 2$. Donc s^3 est pair et donc s est pair. Il existe donc $u \in \mathbb{Z}$ tel que $s = 2u$. Finalement, $x = 2s = 4u$ et $y = 2t = 4v$. Donc $\boxed{x \text{ et } y \text{ sont divisibles par } 4}$.

   (b) On a $y^2 = x^3 + 16$, d'où $16v^2 = 64u^3 + 16$ et donc $v^2 = 4u^3 + 1$. Donc v^2 est impair, donc $\boxed{v \text{ est impair}}$.

   (c) On a $v^2 = 4w^2 + 4w + 1 = 4u^3 + 1$, d'où $w(w+1) = u^3$. De plus, comme $(w+1) - w = 1$, w et $w+1$ sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout. Donc, d'après la question 1b,

$$\boxed{w \text{ et } w+1 \text{ sont des cubes parfaits}}.$$

   Il existe alors $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $w + 1 = a^3$ et $w = b^3$. Comme $a^3 > b^3$, $a > b$. D'autre part, on a $1 = a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, donc $a - b$ divise 1. On en déduit $a - b = 1$ et $a^2+ab+b^2 = 1$, puis $(b+1)^2 + (b+1)b + b^2 = 1$, *i.e.* $3b(b+1) = 0$. On a donc ($b = 0$ et $a = 1$) ou ($b = -1$ et $a = 0$). Dans les deux cas, $u^3 = w(w+1) = a^3b^3 = 0$, donc $x = 4u = \boxed{0}$.

4. Soit $x, y \in \mathbb{Z}$.
   - Supposons $y^2 = x^3 + 16$. D'après les questions précédentes, y est nécessairement pair et alors, dans ce cas, $x = 0$. On en déduit $y^2 = 16$, et donc $y = 4$ ou $y = -4$.
   - Réciproquement, si $x = 0$ et ($y = 4$ ou $y = -4$), alors on a bien $y^2 = x^3 + 16$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des couples } (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tels que } y^2 = x^3+16 \text{ est } \{(0,4),(0,-4)\}.}$$

5. Soit $a \in \mathbb{Z}$. Il suffit de calculer la congruence de a^2 modulo 8 en fonction de la congruence de a modulo 8.

$a[8]$	0	1	2	3	4	5	6	7
$a^2[8]$	0	1	4	1	0	1	4	1

   Donc $\boxed{a^2 \text{ est congru à } 0, 1 \text{ ou } 4 \text{ modulo } 8}$.

6. Soit $b \in \mathbb{N}$ tel que $b \equiv 3$ [4]. On écrit la décomposition de b en facteurs premiers. Il existe un ensemble fini B de nombres premiers et $\beta : B \to \mathbb{N}^*$ tels que :

$$b = \prod_{p \in B} p^{\beta(p)}.$$

   Comme $b \equiv 3$ [4], b est impair, donc tous les nombres premiers de B sont impairs et donc congrus à 1 ou 3 modulo 4. Supposons qu'ils soient tous congrus à 1 modulo 4. On en déduirait alors $b \equiv 1$ [4], par produit de congruences. Cela contredit notre hypothèse.
   Donc $\boxed{b \text{ est divisible par un nombre premier congru à } 3 \text{ modulo } 4}$.

7. (a) Supposons x pair. Il existe alors $a \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2a$. On en déduit $y^2 = 8a^3 + 7$, donc $y^2 \equiv 7$ [8]. Or d'après la question 5, un carré parfait ne peut pas être congru à 7 modulo 8.
   Donc $\boxed{x \text{ est impair}}$.

(b) Posons $b = (x-1)^2 + 3$. Tout d'abord, $b \in \mathbb{N}$. Comme x est impair, il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2a+1$. Ainsi $b = 8a^2 + 3$, donc $b \equiv 3\ [4]$. D'après la question 6,

$$\boxed{(x-1)^2 + 3 \text{ est divisible par un nombre premier } p \text{ congru à 3 modulo 4.}}$$

(c) Par la formule de Bernoulli, on a $x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4) = (x+2)((x-1)^2 + 3)$. D'après la question précédente, $p \mid (x-1)^2 + 3$. On en déduit $x^3 + 8 \equiv 0\ [p]$ et donc $y^2 + 1 \equiv 0\ [p]$. Donc $\boxed{y^2 \equiv -1\ [p]}$.

8. Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $y^2 = x^3 + 7$. D'après les questions précédentes, il existe un nombre premier p tel que $p \equiv 3\ [4]$ et $y^2 \equiv -1\ [p]$. En particulier, y est premier avec p. Donc, d'après le petit théorème de Fermat, $y^{p-1} \equiv 1\ [p]$. Or, comme $p \equiv 3\ [4]$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 4k+3$. Ainsi $p-1 = 2(2k+1)$. On a donc $y^{p-1} = (y^2)^{2k+1}$, donc $y^2 \equiv (-1)^{2k+1} \equiv -1\ [p]$. On a donc montré $1 \equiv -1\ [p]$, ce qui équivaut à $p \mid 2$. Cela est absurde.

$$\boxed{\text{Aucun couple } (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \text{ ne vérifie } y^2 = x^3 + 7.}$$

Problème 2

1. Si $n = 0$, l'énoncé de la formule de Taylor-Lagrange devient : soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$$

Ceci puisque la somme de la formule est réduite à un terme $\dfrac{(b-a)^0}{0!} f^{(0)}(a)$ qui est bien égal à $f(a)$. On retrouve exactement l'énoncé du théorème des accroissements finis.

2. (a) On a $\varphi(b) = f(b) - \Big(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-b)^k}{k!} f^{(k)}(b)\Big) - A\frac{(b-b)^{n+1}}{(n+1)!} = f(b) - f(b) = 0$. Donc $\boxed{\varphi(b) = 0}$.

(b) On veut avoir $\varphi(a) = 0$, c'est-à-dire : $f(b) - \Big(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\Big) - A\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, pour cela il suffit de prendre

$$A = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \Big(f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\Big)$$

$$\boxed{\exists A \in \mathbb{R},\ \varphi(a) = \varphi(b)}$$

(c) La fonction φ est une somme de produits de fonctions polynomiales par les dérivées de la fonction f jusqu'à l'ordre n, toutes ces fonctions sont continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ puisque f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et dérivable $n+1$ fois sur $]a, b[$. La fonction φ est donc continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Avec les règles usuelles de dérivation des sommes et des produits, on a pour tout $t \in]a, b[$:

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \underbrace{-f'(t)}_{\substack{\text{terme pour} \\ k=0}} - \Big(\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{-k(b-t)^{k-1}}{k!} f^k(t) + \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\Big)\Big) - A\frac{-(n+1)(b-t)^n}{(n+1)!} \\
&= -f'(t) + \Big(\sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^k(t) - \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\Big)\Big) + A\frac{(b-t)^n}{n!} \\
&= -f'(t) + f'(t) - \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + A\frac{(b-t)^n}{n!} \\
&= -\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + A\frac{(b-t)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

On a pu simplifier ce calcul en reconnaissant une somme télescopique. On a trouvé l'expression de $\varphi'(t)$ annoncée :

$$\boxed{\forall t \in]a,b[,\ \varphi'(t) = -\frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) + A\frac{(b-t)^n}{n!}}.$$

(d) La fonction φ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle :

- φ est continue sur $[a,b]$, nous l'avons justifié à la question précédente.
- φ est dérivable sur $]a,b[$.
- $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Il existe alors $c \in]a,b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or

$$\varphi'(c) = 0 \Leftrightarrow -\frac{(b-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c) + A\frac{(b-c)^n}{n!} = 0 \Leftrightarrow A = f^{(n+1)}(c)$$

La formule de Taylor-Lagrange découle alors de l'égalité $\varphi(a) = 0$ puisque

$$\varphi(a) = 0 \Leftrightarrow f(b) = \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\Big) + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On a bien démontré que

$$\boxed{\exists c \in]a,b[,\ f(b) = \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\Big) + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}}.$$

3. (a) Notons $I =]-1,+\infty[$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I par composition car :

$$\forall x \in I,\ 1+x \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \ln \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

En calculant les premières dérivées de f, on peut conjecturer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la formule

$$\mathcal{H}_n\ :\ \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$\boxed{\textbf{Init.}}$ Pour tout $x \in I$: $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, ce qui correspond bien à la formule annoncée pour $n = 1$.

$\boxed{\textbf{Hér.}}$ On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et l'on suppose que

$$\forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

.

On dérive la relation précédente :

$$\forall x \in I,\ f^{(n+1)}(x) = -n\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

, ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}}.$$

(b) Dans toute la suite n désigne un entier naturel. Soit $x \in]0,1]$, on va appliquer la formule de Taylor-Lagrange sur l'intervalle $[0,x]$ à la fonction f. Les hypothèses sont vérifiées puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I donc en particulier de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,x]$. Ainsi

$$\exists c \in]0,x[,\ \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

On remarque que cette relation est également vraie pour $x = 0$. Finalement,

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \exists c > 0,\ \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)}.$$

(c) On reprend la formule précédente en isolant le terme $k = 0$ dans la somme :

$$\forall x \in [0,1],\ \exists c > 0,\ \ln(1+x) = \ln(1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}(-1)^n n!}{(1+c)^{n+1}(n+1)!}$$

En simplifiant cela donne

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \exists c > 0,\ \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} + \frac{x^{n+1}(-1)^n}{(1+c)^{n+1}(n+1)}}.$$

(d) Comme $c > 0$, on a $(1+c) > 1$ donc $(1+c)^{n+1} > 1$, ainsi en reprenant l'expression précédente, on a pour tout $x \in [0,1]$

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right| = \left|\frac{x^{n+1}(-1)^n}{(1+c)^{n+1}(n+1)}\right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)},$$

ce qui démontre bien que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ \left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}}.$$

(e) Prenons $x = 1$ dans l'inégalité précédente.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| \leq \frac{1}{n+1},$$

ce qui démontre que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} T_n = \ln(2)}.$$

4. (a) On part de la relation que l'on a supposée vérifiée :

$$ae^2 + be + c = 0 \Leftrightarrow ae + b + ce^{-1} = 0 \Leftrightarrow ae + ce^{-1} = -b \Leftrightarrow f(1) = -b.$$

Or b est un entier, ainsi

$$\boxed{f(1) \in \mathbb{Z}}.$$

(b) Il s'agit d'appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction f sur l'intervalle $[0,1]$. Les hypothèses sont vérifiées puisque la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Comme le réel c fourni par la formule dépend de n, nous le notons ici c_{n+1}.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \exists c_{n+1} \in]0,1[,\ f(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}}.$$

(c) D'après la relation précédente, on a

$$f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$$

. On multiplie par $n!$:

$$f(1)n! - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)n!}{k!} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{n+1}$$

.

Montrons que les différents termes du membre de gauche sont des entiers relatifs :

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x et tout entier naturel k, on a $f^{(k)}(x) = ae^x + (-1)^k ce^{-x}$; en particulier $f^{(k)}(0) = a + (-1)^k c \in \mathbb{Z}$ car a et c sont des entiers.
- Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\dfrac{n!}{k!} \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{n+1} \text{ est un entier relatif}}.$$

D'autre part, on a :

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{n+1}\right| = \left|\frac{ae^{c_{n+1}} + (-1)^{n+1}ce^{-c_{n+1}}}{n+1}\right| \leq \frac{|a|e + |c|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

en utilisant l'inégalité triangulaire et le fait que $e^{c_{n+1}} \leq e$ et $e^{-c_{n+1}} \leq 1$ car $c_{n+1} \in]0,1[$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{n+1} = 0}.$$

(d) La question précédente nous apprend que $\left(\dfrac{f^{(n+1)}(c_n)}{n+1}\right)$ est une suite d'entiers relatifs qui converge vers 0, donc la suite est stationnaire (voir exercice classique de suites), c'est-à-dire que

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ f^{(n+1)}(c_{n+1}) = ae^{c_{n+1}} + (-1)^{n+1}ce^{-c_{n+1}} = 0.$$

Comme une exponentielle est strictement positive ceci implique que : $\forall n \geq N,\ a$ et $(-1)^{n+1}c$ sont de signes opposés. Ceci n'est possible que si $a = c = 0$ et puisque $ae^2 + be + c = 0$, on en déduit que $b = 0$. C'est absurde car on a supposé que a, b et c ne sont pas tous les trois nuls.

$$\boxed{\text{Il est impossible que } ae^2 + be + c = 0 \text{ avec } (a,b,c) \in \mathbb{N}^3 \setminus \{(0,0,0)\}}.$$

Remarque. Le nombre e est transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients entiers, mais c'est plus difficile à démontrer.

$\boxed{\textbf{Problème 3}}$

Les fonctions höldériennes dont nous voyons ici la définition et quelques exemples sont une famille de fonctions qui joue un rôle important en analyse. Otto Hölder était un mathématicien allemand de la fin du XIX^e siècle.

1. Soit $a \in I$, démontrons que f est continue en a. Comme f est α-höldérienne, il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in I$,
$$|f(x) - f(a)| \leqslant K|x-a|^\alpha.$$
Comme $\alpha > 0$, on a $\lim_{x\to a} |x-a|^\alpha = 0$. De l'inégalité précédente, on déduit que $\lim_{x\to a} |f(x) - f(a)| = 0$ et par suite $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. C'est la définition de la continuité en a.
$$\boxed{f \text{ est continue sur } I}.$$

2. Si I est un segment, f' est continue sur un segment donc bornée (et atteint ses bornes). Soit K le maximum de $|f'|$ sur I.
Soit $x, y \in I$. f est continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$, et $|f'|$ est majorée par K sur $]x,y[$. D'après l'inégalité des accroissements finis, $|f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|$ donc $\boxed{f \text{ est 1-höldérienne}}$.

3. (a) Soit $x \in I \setminus \{a\}$, avec la définition de f α-höldérienne, on a
$$\left|\frac{f(x) - f(a)}{x-a}\right| \leqslant K|x-a|^{\alpha-1}.$$
Comme $\alpha > 1$, on a $\lim_{x\to a} |x-a|^{\alpha-1} = 0$. Ainsi
$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0}.$$
(b) D'après la question précédente, la fonction f est dérivable sur I et pour tout $a \in I$, on a $f'(a) = 0$. Donc
$$\boxed{f \text{ est constante sur } I}.$$

4. (a) Il s'agit de démontrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant K\sqrt{|x-y|}.$$
Supposons sans perte de généralité $0 \leqslant x \leqslant y$, on a : $\sqrt{xy} \geqslant \sqrt{x^2} = x$ donc $y - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + x \leqslant y - x$, c'est-à-dire $(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 \leqslant y - x$. En passant à la racine carrée, il vient $|\sqrt{y} - \sqrt{x}| \leqslant \sqrt{|y-x|}$. On a démontré que
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$$
et par conséquent
$$\boxed{f \text{ est } \frac{1}{2}\text{-höldérienne}}.$$
(b) Soit $\beta \in \mathbb{R}_+^* \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, on suppose, par l'absurde que f est β-höldérienne, en particulier en appliquant la définition avec $y = 0$ et $x > 0$, on sait qu'il existe $K \geqslant 0$ tel que
$$\forall x > 0,\ \sqrt{x} \leqslant Kx^\beta \Leftrightarrow \forall x > 0,\ x^{\frac{1}{2}-\beta} \leqslant K$$

- Si $\beta < \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}-\beta} = +\infty$, ce qui est absurde.
- Si $\beta > \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to0^+} x^{\frac{1}{2}-\beta} = +\infty$, ce qui est absurde.

$$\boxed{f \text{ est } \beta\text{-höldérienne si et seulement si } \beta = \frac{1}{2}}.$$

5. (a) i. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \geqslant 0$: $\varphi'(t) = \alpha[(1+t)^{\alpha-1} - t^{\alpha-1}]$. Or la fonction $x \mapsto x^{\alpha-1}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque $\alpha - 1 < 0$, donc pour tout $t > 0$, $\varphi'(t) \leqslant 0$ et par conséquent

$$\boxed{\varphi \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+}.$$

ii. D'après la question précédente, on a pour tout $t \geqslant 0$, $\varphi(t) \leqslant \varphi(0) = 1$.

$$\boxed{\forall t \geqslant 0,\ \varphi(t) \leqslant 1}.$$

(b) Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, si $y = 0$ l'inégalité est trivialement vérifiée. Sinon, on a

$$(x+y)^\alpha - x^\alpha = y^\alpha \Big[\underbrace{\left(1+\frac{x}{y}\right)^\alpha - \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha}_{\leqslant 1 \text{ d'après la question précédente}} \Big] \leqslant y^\alpha.$$

D'autre part, $(x+y)^\alpha - x^\alpha \geqslant 0$ comme x et y sont positifs et $\alpha > 0$. Finalement,

$$\boxed{\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ 0 \leqslant (x+y)^\alpha - x^\alpha \leqslant y^\alpha}.$$

(c) Soient $(u,v) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on suppose $u \geqslant v$ par exemple et l'on applique la formule précédente avec $x = v$ et $y = u - v$, cela donne

$$u^\alpha - v^\alpha \leqslant (u-v)^\alpha, \quad \text{c'est-à-dire : } |u^\alpha - v^\alpha| \leqslant |u-v|^\alpha$$

Ce qui est la définition de g_α α-höldérienne avec $K = 1$.

$$\boxed{g_\alpha \text{ est } \alpha\text{-höldérienne}}.$$

6. (a) Par croissances comparées, $x\ln(x) \xrightarrow[x\to0]{} 0$, donc $\boxed{h \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$.

(b) Supposons que h soit 1-höldérienne et soit alors $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall a, x \in]0,1],\ |h(x) - h(a)| \leqslant K|x-a|.$$

En posant $x < \frac{1}{2}$ et $a = 2x$, on a $\forall x < \frac{1}{2}$, $|x\ln x - 2x\ln(2x)| \leqslant Kx$.
Or $|x\ln x - 2x\ln(2x)| = |x\ln x - 2x(\ln 2 + \ln x)| = |x\ln x + 2x\ln 2|$. D'où $|x\ln x + 2x\ln 2| \leqslant Kx$, *i.e.* $|\ln x + 2\ln 2| \leqslant K$.
L'examen de la limite en $x \to +\infty$ met en évidence une contradiction. On a donc montré par l'absurde que

$$\boxed{\text{h n'est pas 1-höldérienne}}.$$

(c) Soit $\alpha \in]0,1[$. Soit $x, y \in]0,1]$. Quitte à les échanger, on suppose $x < y$.

$$\begin{aligned} h(y) - h(x) &= y \ln y - x \ln x \\ &= y \ln y - x \ln y + x \ln y - x \ln x \\ &= (y-x) \ln y + x \ln \left(\frac{y}{x}\right) \\ &= (y-x) \ln y + x \ln \left(1 + \frac{y-x}{x}\right). \end{aligned}$$

Or $\forall u > -1$, $\ln(1+u) \leqslant u$, donc ici $\ln\left(1 + \frac{y-x}{x}\right) \leqslant \frac{y-x}{x} \leqslant y - x$ (car $x < 1$).
Finalement, $|h(y) - h(x)| \leqslant (y-x)(|\ln y| + 1) \leqslant (y-x)^{\alpha}\left[(y-x)^{\alpha-1}(|\ln y| + 1)\right]$.
Or $(y-x)^{\alpha-1}(|\ln y|+1) \leqslant y^{\alpha-1}(|\ln y| + 1)$.
Et $y \mapsto y^{\alpha-1}(|\ln y| + 1)$ est continue sur $[0,1]$, après l'avoir prolongée par continuité en 0, donc elle est bornée par un certain $K \in \mathbb{R}_+^*$, qui permet d'écrire

$$\boxed{|h(y) - h(x)| \leqslant K|y-x|^{\alpha}}.$$