

TD D2. Calcul matriciel

1 Opérations matricielles

Exercice D2.1

Soit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer AB et BA .
2. Calculer $(AB)^T$, A^T , B^T et $B^T A^T$.
3. Calculer $\text{Tr } A$, $\text{Tr } B$, $\text{Tr}(AB)$ et $\text{Tr}(BA)$.
4. Développer $(A + B)^2$.

Exercice D2.2

Calculer lorsque c'est possible les produits AB et BA .

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

2. $A = (1 \ 1 \ 1 \ 1)$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

3. $A = (1)$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice D2.3

Calculer tous les produits de deux matrices possibles, où les deux matrices sont à choisir parmi :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = (-1 \ 0 \ 2), \quad D = 3C^T, \\ E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice D2.4

Montrer que $\left\{ \begin{pmatrix} \text{ch } x & \text{sh } x \\ \text{sh } x & \text{ch } x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ est stable par produit.

Exercice D2.5

Calculer les puissances des matrices suivantes

1. $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ puis $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.



$$2. J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ puis } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice D2.6  

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une expression de A^2 comme combinaison linéaire de A et I_3 .
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n, b_n \in \mathbb{R}, A^n = a_n A + b_n I_3$.
3. Déterminer une expression des suites (a_n) et (b_n) puis de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice D2.7  

Soit A et B deux matrices carrées telles que $AB - BA = B$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \text{Tr}(B^k) = 0$.

Exercice D2.8  

Soit $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\text{Tr}((AB - BA)^\top(AB - BA)) = 2(\text{Tr}(A^2 B^2) - \text{Tr}((AB)^2))$.
2. En déduire que $\text{Tr}((AB)^2) \leq \text{Tr}(A^2 B^2)$.

Exercice D2.9  

Trouver si c'est possible deux matrices carrées A et B telles que $AB - BA = I_n$.

2 Matrices inversibles

Exercice D2.10  

Soient X et Y deux matrices colonnes.

1. Montrer que XY^\top est de rang 1.
2. Montrer que toute matrice carrée A de rang 1 peut s'écrire de la forme ci-dessus.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A^2 = \lambda A$.

Exercice D2.11 

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$.

1. Montrer que si A et B sont nilpotentes, alors AB et $A + B$ sont également nilpotentes.
2. Montrer que si M est nilpotente, alors $I_n - M$ est inversible et donner son inverse.

Exercice D2.12

Calculer l'inverse des matrices

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad 2. B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 3. C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice D2.13

Déterminer le rang des matrices suivantes. Dans l'éventualité où il serait maximal pour une matrice carrée, calculer l'inverse de la matrice.

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 2. B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 3. C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice D2.14 ⚙️

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice D2.15 ⚙️⚙️

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer P^2 , Q^2 , PQ et QP .
2. Exprimer A en fonction de P et Q puis pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k en fonction de P et Q .
3. Cette relation est-elle vraie pour $k \in \mathbb{Z}$?

Exercice D2.16 ⚙️⚙️

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer trois valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ telles que $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, le système $AX = \lambda_i X$ a une solution $X_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nulle.
2. Soit P la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui a pour colonnes X_1, X_2 et X_3 .
3. Déterminer sans calculs une matrice diagonale D telle que $AP = PD$.
4. En déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Calculer de la même manière les puissances des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice D2.17 ⚙️⚙️

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall 1 \leq i, j \leq n$, $[N]_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Calculer N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall 1 \leq i, j \leq n$, $[A]_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \geq i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Exprimer A à l'aide des puissances de N puis montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice D2.18 ⚙️

Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on note $M(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & x \end{pmatrix}$. Soit $E = \{M(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que E est stable par produit.
2. Pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$, calculer $M(xz, -yz)M(x, y)$.



3. Pour quels couples (x, y) la matrice $M(x, y)$ est-elle inversible? Donner son inverse dans ce cas.

Exercice D2.19 

Soit $E = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \exists a, b \in \mathbb{R}, \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, [M]_{i,j} = \begin{cases} a & \text{si } i = j \\ b & \text{sinon} \end{cases} \right\}$.

1. Montrer que E est stable par produit.
2. À quelle condition nécessaire et suffisante sur a et b une matrice $M \in E$ est-elle inversible? Montrer que dans ce cas, $M^{-1} \in E$.

Exercice D2.20 

Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ non constante et multiplicative, *i.e.* telle que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), f(AB) = f(A)f(B).$$

Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(A) = 0$ si et seulement si A n'est pas inversible.