

Programme de colle 16 : du 27/01 au 31/01

Arithmétique des entiers

- PGCD, PPCM, algorithme d'Euclide étendu, identité de Bézout.
- Nombres premiers entre eux, caractérisation par le théorème de Bézout, propriétés.
- Théorème de Gauß.
- Relation entre PGCD et PPCM.
- Extension des définitions au cas d'une famille finie de nombres entiers.
- Nombres premiers entre eux dans leur ensemble ou deux à deux. Propriétés de Bézout.
- Nombres premiers, cardinal infini.
- Petit théorème de Fermat.
- Décomposition primaire : existence d'un diviseur premier, d'une décomposition en produit de nombres premiers.
- Valuations p -adiques, formules, lien avec la divisibilité, calcul de PGCD, PPCM.
- Méthodes de résolution : équations modulaires du type $ax \equiv b [m]$, systèmes (théorème des restes chinois), équations diophantiennes du type $ax + by = c$.

Exercices abordés dans le TD C3 : 2, 3, 5, 11, 13, 17, 31, 37, 41, 43, 47, 67, 73.

Dénombrement

- Cadre théorique : ensembles finis, cardinal.
- Propriétés : cardinal d'une partie (cas d'égalité), union disjointe, produit cartésien, union de deux parties (formule du crible).
- Principes de dénombrement : principes des bergers, des tiroirs.
- Dénombrement de p -listes, p -arrangements, p -ermutations, p -combinaisons.
- Dénombrement des applications de E dans F , des injections de E dans F , des parties à p éléments d'un ensemble fini.
- Interprétation combinatoire des formules sur les coefficients binomiaux.

Exercices abordés dans le TD E1 : 1, 2, 3, 4, 6, 10.

Questions de cours

- Énoncé et démonstration du petit théorème de Fermat (et du lemme de divisibilité des coefficients binomiaux dont il découle).
- Dénombrer les anagrammes d'un mot donné (au choix de l'examineur).
- Dénombrer les applications et les injections entre deux ensembles finis.
- Soit E un ensemble fini et $0 \leq p \leq |E|$. Dénombrer les parties de E à p éléments.

Remarques

- En dénombrement, la politique des jurys de concours est d'accepter les raisonnements corrects même s'il ne sont pas nécessairement d'un formalisme absolu. Par contre, les arguments doivent être clairement identifiés pour justifier les ingrédients de chaque formule (somme, produit, puissance, factorielle, coefficient binomial...).
- En plus du savoir-faire, il est important de savoir énoncer les définitions des notions ou les théorèmes employés.
- La logique est distillée au fil des premiers chapitres, quand cela se présente. Les raisonnements par analyse-synthèse ayant désormais été abordés, les résolutions d'équations ou de problèmes doivent maintenant être bien rigoureux.

Recommandations générales

La colle commencera par une question de cours. On vérifiera également au fil des exercices que le cours est maîtrisé. Si c'est le cas, la note finale est à deux chiffres. Sinon, impossible de dépasser 10.