Problème 1 *Combinaisons avec répétitions*

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit E un ensemble à n éléments : $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$. On appelle $C_{n,p}$ le nombre de « combinaisons de p éléments choisis dans E avec répétitions possibles ». Autrement dit, on considère des tirages de p éléments de E avec remise, mais sans tenir compte de l'ordre. On considérera que $C_{n,0} = 1$.

Un petit exemple pour bien comprendre : $C_{2,3} = 4$. En effet, on considère les tirages de 3 éléments, chacun pris dans $E = \{e_1,e_2\}$, sans tenir compte de l'ordre. Cela donne 4 issues possibles :

- $\{e_1,e_1,e_1\}$ (3 fois e_1),
- $\{e_1,e_1,e_2\}$ (2 fois e_1, une fois e_2, peu importe dans quel ordre),
- $\{e_1,e_2,e_2\}$,
- $\{e_2,e_2,e_2\}$.

1. Autre exemple : on lance 3 dés indiscernables à 6 faces. Le nombre de résultats possible est $C_{6,3}$. Écrire la liste complète des résultats possibles (qui commence par 111, 112, 113, 114, 115, 116, 122, 123, *etc.*) et en déduire $C_{6,3}$.
2. Démontrer que $C_{n,p}$ est égal au nombre d'applications croissantes de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$.
3. Montrer que
$$C_{n,p} = \left| \left\{ (x_1, \ldots ,x_n) \in \mathbb{N}^n, \sum_{k=1}^{n} x_k = p \right\} \right|.$$
4. Soient $m,n \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leqslant m \leqslant n$. Montrer que
$$\sum_{j=m}^{n} \binom{j}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$
5. Montrer que, toujours pour $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,
$$C_{n+1,p} = \sum_{k=0}^{p} C_{n,k}$$
6. Montrer par récurrence sur n que $C_{n,p} = \binom{n+p-1}{p}$.
7. Combien y a-t-il d'issues possibles lors d'un premier lancer de dés au yam's (ou yahtzee : jeu ou l'on lance pour commencer 5 dés classiques) ?
8. On suppose cette fois que $n,p \in \mathbb{N}^*$. Exprimer simplement la somme
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(k+p-1)!}{k!}$$
(ou, si vous le préférez en toutes lettres, la somme des $(p-1)$-arrangements de $(k+p-1)$ éléments).

Problème 1

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit E un ensemble à n éléments : $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$. On appelle $C_{n,p}$ le nombre de « combinaisons de p éléments choisis dans E avec répétitions possibles ». Autrement dit, on considère des tirages de p éléments de E avec remise, mais sans tenir compte de l'ordre. On considérera que $C_{n,0} = 1$.

Un petit exemple pour bien comprendre : $C_{2,3} = 4$. En effet, on considère les tirages de 3 éléments, chacun pris dans $E = \{e_1, e_2\}$, sans tenir compte de l'ordre. Cela donne 4 issues possibles :

- $\{e_1,e_1,e_1\}$ (3 fois e_1),
- $\{e_1,e_1,e_2\}$ (2 fois e_1, une fois e_2, peu importe dans quel ordre),
- $\{e_1,e_2,e_2\}$,
- $\{e_2,e_2,e_2\}$.

1. Autre exemple : on lance 3 dés indiscernables à 6 faces. Le nombre de résultats possible est $C_{6,3}$. Résultats possibles :

   111, 112, 113, 114, 115, 116,
   122, 123, 124, 125, 126,
   133, 134, 135, 136,
   144, 145, 146,
   155, 156,
   166,

   222, 223, 224, 225, 226,
   233, 234, 235, 236,
   244, 245, 246,
   255, 256,
   266,

   333, 334, 335, 336,
   344, 345, 346,
   355, 356,
   366,

   444, 445, 446,
   455, 456,
   466,

   555, 556,
   566,

   666.

   Cela donne $\boxed{\text{56 possibilités}}$.

2. Soit $E = [\![1, n]\!]$. Étant donnée une combinaison de E avec répétition $\{u_1, \ldots, u_p\}$, on choisit une numérotation telle que $u_1 \leqslant \ldots \leqslant u_p$. On lui associe alors l'application $\begin{array}{ccc} [\![1,p]\!] & \to & [\![1,n]\!] \\ i & \mapsto & u_i \end{array}$, qui est une application croissante de $[\![1,p]\!]$ vers $[\![1,n]\!]$.
   Cette association est bijective car on peut exhiber sa réciproque : à $f : [\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$ croissante, on associe l'ensemble $\{f(1), \ldots, f(r)\}$ qui est bien une combinaison de p éléments de E avec répétition.
   Ainsi $\boxed{C_{n,p} \text{ est égal au nombre d'applications croissantes de } [\![1,p]\!] \text{ vers } [\![1,n]\!]}$.

3. Cette fois, à une combinaison de E avec répétition $\{u_1, \ldots, u_p\}$, on associe le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ tel que x_i est le nombre d'occurrences de i dans $\{u_1, \ldots, u_p\}$. On a bien alors $\sum x_i = p$ et cette association est évidemment bijective (il est très facile de décrire sa réciproque ou d'expliquer comment un n-uplet représente une unique combinaison de p éléments de E avec répétition).
   Ainsi $\boxed{C_{n,p} = \left| \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n, \sum_{k=1}^{n} x_k = p \right\} \right|}$.

4. Soit $m \in \mathbb{N}$. On montre la propriété par récurrence sur n (à partir de la valeur m).

   Init. Pour $n = m$: l'égalité est $1 = 1$.

Hér. Soit $n \geqslant m$ tel que $\displaystyle\sum_{j=m}^{n} \binom{j}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

Alors $\displaystyle\sum_{j=m}^{n+1} \binom{j}{m} = \binom{n+1}{m+1} + \binom{n+1}{m} = \binom{n+2}{m+1}$ grâce à la formule de Pascal.

On a donc montré que pour tous $m,n \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leqslant m \leqslant n$, $\boxed{\displaystyle\sum_{j=m}^{n} \binom{j}{m} = \binom{n+1}{m+1}.}$.

5. On considère une p-combinaison avec répétitions de $[\![1, n+1]\!]$.
Soit k le nombre d'occurrence de l'élément $n+1$. On a $0 \leqslant k \leqslant p$.
Alors les autres éléments de cette combinaison constituent une $(p-k)$-combinaison avec répétitions de $[\![1, n]\!]$, ce qui donne $C_{n,p-k}$ possibilités.
Les différentes valeurs de k recouvrant toutes les situations possibles (on pourrait énoncer cela sous forme de réunion disjointe), on a : $\boxed{C_{n+1,p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} C_{n,k}}$.
(on peut aussi se ramener aux objets introduits dans la question 3 en distinguant suivant les valeurs de x_{n+1}.)

6. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété : $\forall p \in \mathbb{N}$, $C_{n,p} = \dbinom{n+p-1}{p}$.

Init. Il y a une p combinaison de $E = \{x_1\}$: la combinaison contenant p fois l'élément x_1. Et on a bien $\dbinom{1+p-1}{p} = 1$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $C_{n,k} = \dbinom{n+k-1}{k}$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Alors $C_{n+1,p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n+k-1}{k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n+k-1}{n-1}$.

On effectue un décalage : $C_{n+1,p} = \displaystyle\sum_{j=n-1}^{p+n-1} \binom{j}{n-1} = \binom{n+p}{n} = \binom{n+p}{p} = \binom{n+1+p-1}{p}$.

7. On lance 5 dés dont l'ordre des résultats est indifférent et consiste en 5 éléments de $[\![1,6]\!]$ avec répétitions possibles. On a donc $C_{6,5} = \boxed{\dbinom{10}{5} = 252 \text{ lancers possibles}}$.

8. D'une part, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_{p,k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k-1}{k} = \frac{1}{(p-1)!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(p+k-1)!}{k!}$.
Par ailleurs, cette somme vaut $C_{p+1,n} = \dbinom{p+n}{n}$.
Finalement $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(p+k-1)!}{k!} = (p-1)! \frac{(p+n)!}{p!n!} = \boxed{\frac{1}{p}\frac{(p+n)!}{n!}}$.