DEVOIR MAISON n^{o} 13

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être $\boxed{\text{encadrés}}$.
La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.
Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'objet de ce problème est l'étude des matrices orthogonales. Dans tout le problème, I_n désigne la matrice identité de taille n et 0_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Définition 1

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que la matrice M est **orthogonale** *lorsque $M^\intercal M = MM^\intercal = I_n$.*

On notera traditionnellement $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille $n \in \mathbb{N}^*$

A Généralités

1. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on suppose inversibles. Montrer que si $AB = BA$, alors $A^{-1}B = BA^{-1}$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $M^\intercal M = I_n$, alors M est orthogonale.
3. Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est inversible et donner son inverse. A-t-on $M^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$?
4. Soit $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
   (a) A-t-on nécessairement $A + B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$? Justifier.
   (b) A-t-on nécessairement $AB \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$? Justifier.

B Matrices orthogonales de taille 2

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on suppose de plus orthogonale.

5. Montrer que $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$ et $ac + bd = 0$.
6. Supposons dans cette question que $a = 0$. En déduire que $b = \pm 1$ puis que M est une des quatre matrices suivantes :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
7. Supposons maintenant que $a \neq 0$.
   (a) Justifier qu'il existe $t \in [0, 2\pi[\setminus \left\{ \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right\}$ tel que $a = \cos t$ et $c = \sin t$.
   (b) En déduire que M est une des deux matrices suivantes : $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.
8. Conclusion : donner toutes les matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

C Matrices orthogonales particulières

Soit $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

9. Supposons M orthogonale.
   (a) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_{ik}^2 = 1$.
   (b) En déduire que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $|m_{ij}| \leqslant 1$.
10. On s'intéresse au cas où tous les coefficients de M sont des nombres entiers.
    (a) Montrer que si M est orthogonale, alors elle comporte exactement un coefficient non nul par ligne et par colonne et que ce coefficient vaut $+1$ ou -1.
    (b) Réciproquement, si M est telle que chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient non nul égal à $+1$ ou -1, calculer les coefficients de MM^T.
    (c) Donner un exemple de telle matrice orthogonale de taille 4 qui ne soit pas I_4.

D Construction de matrices orthogonales

11. Un exemple : soit $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
    (a) Par la méthode de votre choix, montrer que la matrice $I_3 + B$ est inversible et déterminer son inverse.
    (b) Calculer $M = (I_3 - B)(I_3 + B)^{-1}$.
    (c) Vérifier que M est une matrice orthogonale.

Avant d'établir une généralisation, montrons un résultat pratique.

12. Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $\varphi(Y) = Y^\mathsf{T} Y$ et on identifie ici la matrice $Y^\mathsf{T} Y$, de taille 1×1, et le nombre réel qu'est son unique coefficient. Montrer que $\varphi(Y) \geqslant 0$ et que $\varphi(Y) = 0 \Leftrightarrow Y = 0_n$.
13. Généralisation : soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **antisymétrique**, c'est-à-dire telle que $A^\mathsf{T} = -A$.
    Soit (S) le système linéaire homogène dont $I_n + A$ est la matrice ; on représente une solution de ce système par une matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $(I_n + A)X = 0_n$.
    (a) Montrer que $A^\mathsf{T} A X = -X$.
    (b) Montrer que $\varphi(AX) = -\varphi(X)$ et en déduire que $X = 0_n$.
    (c) Déduire des questions précédentes que $I_n + A$ est inversible.
    (d) Justifier que $I_n - A$ est inversible.
14. On pose $M = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.
    (a) Montrer que $M^\mathsf{T} = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)$.
    (b) Montrer que M est orthogonale. *(on pourra repenser à la question 1)*

$\boxed{\textbf{Problème 2}}$ **Ce problème fera aussi l'objet d'un corrigé, mais il est là à titre d'entraînement. Comme il est assez facile de savoir si on l'a bien traité ou non, il n'est pas à rédiger.**

Soit $M = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Le but du problème est le calcul, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de M^n de différentes manières. Sauf précision contraire, les cinq questions de ce problème sont donc indépendantes. La cinquième a recours aux polynômes, il conviendra donc d'attendre d'avoir connaissance de ces outils pour traiter cette dernière partie.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Exprimer A^2 en fonction de A.
   (b) En remarquant que $M = A + I_3$, exprimer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer M^2 et déterminer a et b réels tels que
$$M^2 = aM + bI_3. \tag{E1}$$
   (a) Montrer par récurrence qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$M^n = a_n M + b_n I_3.$$
   On donnera les valeurs de a_0, b_0, a_1 et b_1 et on établira les relations entre a_{n+1}, b_{n+1}, a_n et b_n.
   (b) Montrer que (a_n) et (b_n) vérifient toutes deux la même relation de récurrence linéaire à deux termes.
   (c) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n en fonction de n.
   (d) En déduire une expression de M^n et comparer avec la question 1b.
3. (a) Déterminer les deux valeurs de λ telles que la matrice $A - \lambda I_3$ soit de rang inférieur à 3. On les nommera de sorte que $\mathrm{rg}(A - \lambda_1 I_3) = 1$ et $\mathrm{rg}(A - \lambda_2 I_3) = 2$.
   (b) Donner un élément non nul $X_1 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX_1 = \lambda_1 X_1$ et deux éléments non nuls $X_2, X_3 \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ non proportionnels tels que $AX_2 = \lambda_2 X_2$ et $AX_3 = \lambda_2 X_3$.
   (c) Soit $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont X_1, X_2, X_3. Déterminer une matrice diagonale D telle que $MP = PD$.
   (d) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (e) Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donner l'expression de M^n en fonction de D^n, P et P^{-1}.
4. Une petite dernière.
   (a) Montrer qu'il existe une suite (u_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$M^n = \begin{pmatrix} 5 + 4u_n & -4 - 4u_n & -1 - u_n \\ u_n + 1 & -u_n & -1 - u_n \\ 0 & 0 & 3u_n + 4 \end{pmatrix}.$$
   On donnera la valeur de u_0 et on établira la relation entre u_{n+1} et u_n.
   (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de u_n en fonction de n et comparer avec la question 1b.
5. Cette méthode utilise la relation $(E1)$ obtenue précédemment et donne une autre méthode pour calculer les coefficients a_n et b_n.
   (a) Déterminer le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - aX - b$.
   (b) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de M^n en fonction de n et comparer avec la question 1b.