Chapitre B5

Convexité

Objectifs

- Inégalité de convexité.
- Interprétation géométrique de la convexité.
- Caractérisation de la convexité suivant la régularité de la fonction.

1 Généralités

Définition B5.1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est **convexe** sur I lorsque

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1],\ f((1-\lambda)x + \lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

À l'inverse, on dit que f est **concave** lorsque

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1],\ f((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Proposition B5.2

Avec les notations ci-dessus :

- f est convexe et concave si et seulement si $\mathcal{C}_f$ est une droite affine.
- f est concave si et seulement si $-f$ est convexe.

Proposition B5.3 (Inégalité de Jensen)

Soit $n \geqslant 2$ un nombre entier. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, alors pour tous $x_1, \ldots, x_n \in I$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ tels que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

2 Caractérisations

Proposition B5.4 (Croissance des pentes)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Pour tout $a \in I \setminus \{0\}$, on définit la fonction pente

$$\tau_a : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

(i) f est convexe si et seulement si pour tout $a \in I$, τ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

(ii) Si f est convexe, alors pour tous $a, b, c \in I$ tels que $a < b < c$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

Théorème B5.5

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) f est convexe.

(ii) f' est croissante sur I.

(iii) $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.

Théorème B5.6

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Alors

- f est convexe sur I si et seulement si $\forall x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$,
- f est concave sur I si et seulement si $\forall x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$.

Définition B5.7 (point d'inflexion)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On dit que $\mathcal{C}_f$ admet un **point d'inflexion** en x_0 lorsqu'il existe $\eta > 0$ tel que f ait des convexités contraires sur les deux intervalles $]a-\eta, a[$ et $]a, a+\eta[$.

Remarque. En particulier, un tel point est nécessairement un point intérieur de I.

Théorème B5.8

Avec les mêmes notations, on suppose que $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et que f'' s'annule et change de signe en a alors $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en a.

Théorème B5.9

Soit I un intervalle ouvert et a un point intérieur de I. On suppose que $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

- Si f est convexe sur I : $f'(a) = 0$ si et seulement si f admet un minimum global en x_0.
- Si f est concave sur I : $f'(a) = 0$ si et seulement si f admet un maximum global en a.

Méthodes

- Établir la convexité d'une fonction.
- Utiliser les inégalités de convexité.
- Utiliser la comparaison de $\mathscr{C}_f$ avec ses tangentes ou ses cordes.