

# Programme de colle 17 : du 03/02 au 07/02

## Dénombrement

- Cadre théorique : ensembles finis, cardinal.
- Propriétés : cardinal d'une partie (cas d'égalité), union disjointe, produit cartésien, union de deux parties (formule du crible).
- Principes de dénombrement : principes des bergers, des tiroirs.
- Dénombrement de  $p$ -listes,  $p$ -arrangements,  $p$ -ermutations,  $p$ -combinaisons.
- Dénombrement des applications de  $E$  dans  $F$ , des injections de  $E$  dans  $F$ , des parties à  $p$  éléments d'un ensemble fini.
- Interprétation combinatoire des formules sur les coefficients binomiaux.

Exercices abordés dans le TD E1 : 1, 2, 3, 4, 6, 10.

## Calcul matriciel

- Matrices, opérations matricielles : somme, multiplication externe, produit : anneau  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- Matrices particulières (lignes/colonnes, matrice nulle, identité, matrices élémentaires, diagonales, triangulaires supérieures/inférieures).
- Stabilités (par produit) des ensembles de matrices diagonales/triangulaires.
- Calculs de puissances, formules dans le cas de matrices qui commutent.
- Transposée, propriétés, matrices symétriques, antisymétriques.
- Trace, linéarité, trace d'un produit de matrices.
- Matrices inversibles : définition, groupe des inversibles, inverse d'une matrice triangulaire, diagonale, transposée.
- Caractérisations par le rang, les solutions d'un système (homogène ou non).
- Matrices d'opérations élémentaires, algorithme de Gauß-Jordan.
- Rang (nombre de pivots), matrices équivalentes, caractérisation par équivalence à  $J_r$ .

Exercices abordés dans le TD D2 : 1, 2, 5, 6, 10, 12, 14, 16, 19.

## Questions de cours

- Dénombrer les anagrammes d'un mot donné (au choix de l'examineur).
- Dénombrer les applications et les injections entre deux ensembles finis.
- Soit  $E$  un ensemble fini et  $0 \leq p \leq |E|$ . Dénombrer les parties de  $E$  à  $p$  éléments.
- Formule du produit de deux matrices élémentaires.
- Pour toutes matrices  $A, B$  de tailles convenables,  $(AB)^\top = B^\top A^\top$ .
- Pour toutes matrices carrées  $A, B$ ,  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ .

## Remarques

- En dénombrement, la politique des jurys de concours est d'accepter les raisonnements corrects même s'il ne sont pas nécessairement d'un formalisme absolu. Par contre, les arguments doivent être clairement identifiés pour justifier les ingrédients de chaque formule (somme, produit, puissance, factorielle, coefficient binomial...).
- En plus du savoir-faire, il est important de savoir énoncer les définitions des notions ou les théorèmes employés.
- La logique est distillée au fil des premiers chapitres, quand cela se présente. Les raisonnements par analyse-synthèse ayant désormais été abordés, les résolutions d'équations ou de problèmes doivent maintenant être bien rigoureux.

## Recommandations générales

La colle commencera par une question de cours. On vérifiera également au fil des exercices que le cours est maîtrisé. Si c'est le cas, la note finale est à deux chiffres. Sinon, impossible de dépasser 10.