TD B5. Convexité

Exercice B5.1

1. Déterminer la convexité des fonctions suivantes :

   (a) sin,

   (b) ln,

   (c) tan,

   (d) exp

   (e) $x \mapsto x^p$ avec $p > 1$ entier,

   (f) $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$,

2. Déduire de résultats ci-dessus les inégalités suivantes.

   (a) $\forall x \geqslant 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$,

   (b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant x + 1$,

   (c) $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2x}{\pi} \leqslant \sin(x) \leqslant x$,

   (d) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \forall p \geqslant 2$, $(a+b)^p \leqslant 2^{p-1}(a^p + b^p)$,

   (e) $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{2}(a+b)$,

   (f) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \subset \mathbb{R}_+$, $\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Exercice B5.2

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $2^x + 2^{x^3} \geqslant 2^{x^2+1}$.

Exercice B5.3

Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

Exercice B5.4

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et convexe. Montrer que

$$(b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Exercice B5.5

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

1. Justifier l'existence de $M = \max\{|f''(x)|, x \in [a, b]\}$.
2. Soit $g : x \mapsto f(x) - M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$ et $h : x \mapsto f(x) + M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$. Montrer que g est convexe et h concave.
3. Montrer que

$$\forall x \in [a, b],\ |f(x)| \leqslant M\frac{(x-a)(b-x)}{2}$$

Exercice B5.6

Soit f une fonction convexe et g une fonction croissante et convexe. Montrer que $g \circ f$ est convexe

- si l'on suppose f et g de classe $\mathcal{C}^2$,
- sans hypothèses de régularité.

Exercice B5.7 ✿✿✿

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\forall a, b \in [0,1],\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Montrer que f est convexe.