## Chapitre C4

# Polynômes

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## 1 Structure

### 1.1 Anneau des polynômes

**Définition C4.1**

On appelle **polynôme** à coefficients dans $\mathbb{K}$ une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang, *i.e.* telle que

$$\exists N \in \mathbb{N},\, \forall k \geqslant N,\, a_k = 0.$$

**Proposition et définition C4.2**

Soit $P = (a_0, \dots, a_n, 0, \dots)$ et $Q = (b_0, \dots, b_n, 0, \dots)$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- la suite $(\lambda a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un polynôme, noté $\lambda \cdot P$ ou $\lambda P$ ;
- la suite $(a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un polynôme, noté $P + Q$ et appelé la **somme** de $P$ et $Q$ ;
- la suite $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

  $$\forall k \in \mathbb{N},\, c_k = \sum_{k=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

  est un polynôme, noté $P \times Q = (c_0, \dots, c_n, \dots)$ et appelé **produit** de $P$ et $Q$.

**Notations.**

- On note 1 le polynôme $(1, 0, \dots)$.
- On note $X$ le polynôme $(0, 1, 0, \dots)$.
- On note naturellement $X^n$ le produit $n$ fois de $X$ par lui-même, qui donne

  $$X^n = (\underbrace{0, \dots, 0}_{n \text{ zéros}}, \underbrace{1}_{a_n}, 0, \dots).$$

- Avec ces notations, $P = (a_0, \dots, a_n, 0, \dots)$ sera noté

  $$P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = P(X).$$

**Proposition C4.3**

$(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif dont le neutre pour $+$ est le polynôme nul $0 = (0)_{k\in\mathbb{N}}$ et le neutre pour $\times$ est polynôme $1 = (1, 0, 0, \ldots)$.

**Définition C4.4**

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. La **composition** des polynômes $P$ et $Q$ est le polynôme $P \circ Q$ défini par

$$(P \circ Q)(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q(X)^k.$$

**Définition C4.5**

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$. Alors on appelle

(i) **degré de** $P$ l'entier $n$, noté $\deg(P)$. Autrement dit

$$\deg(P) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}.$$

(ii) **terme dominant** de $P$ le monôme $a_n X^n$ et **coefficient dominant** le coefficient $a_n$, que l'on notera $c_d(P)$,

(iii) polynôme **constant** un polynôme de degré 0,

(iv) **polynôme normalisé** ou **unitaire** un polynôme dont le coefficient dominant vaut 1.

**Remarque.** Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.

**Notation.** On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$.

**Proposition C4.6**

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

(i) $\deg(\lambda P) \leqslant P$,

(ii) si $\lambda \neq 0$, alors $\deg(\lambda P) = \deg(P)$ et $c_d(\lambda P) = \lambda c_d(P)$,

(iii) $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$,

(iv) si $\deg(P) < \deg(Q)$, alors $\deg(P + Q) = \deg(Q)$ et $c_d(P + Q) = c_d(P)$,

(v) $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$ et $c_d(PQ) = c_d(P) \times c_d(Q)$,

(vi) si $\deg(Q) \geqslant 1$, alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \deg(Q)$.

**Proposition C4.7**

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors $PQ = 0 \Leftrightarrow P = 0$ ou $Q = 0$. Autrement dit, $\mathbb{K}[X]$ est intègre.

**Proposition C4.8**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. $P$ est inversible si et seulement si $P$ est constant non nul.

## 1.2 Fonctions polynomiales

**Définition C4.9**

Étant donné un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on appelle **fonction polynomiale** associée à $P$ la fonction

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{P} : \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} a_k x^k. \end{array}$$

**Proposition et définition C4.10**

L'application $\begin{array}{rccl} \mathrm{ev}_x : & \mathbb{K}[X] & \to & K \\ & P & \mapsto & \widetilde{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array}$ est un morphisme d'anneaux, vérifiant également

$$\forall P \in \mathbb{K}[X],\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \mathrm{ev}_x(\lambda P) = \lambda\, \mathrm{ev}_x(P)$$

et appelé **morphisme d'évaluation en** $x$.

**Définition C4.11 (Polynôme dérivé)**

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

- On définit alors le **polynôme dérivé** de $P$ par

$$P' = a_1 + 2a_2 X + \ldots + na_n X^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}.$$

- On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$ le $k$**-ième polynôme dérivé** par
  - $P^{(0)} = P$,
  - $\forall k \in \mathbb{N},\ P^{(k+1)} = \left[P^{(k)}\right]'$.

**Proposition C4.12**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$.

(i) si $n > 0$, alors $\deg P' = \deg P - 1$ et $c_d(P') = nc_d(P)$,

(ii) $P$ est constant si et seulement si $P' = 0$.

**Remarque.** Cette propriété sur le degré de $P'$ ne se généralisera qu'à un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle.

**Proposition C4.13**

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Alors

(i) $(\alpha P + \beta Q)' = \alpha P' + \beta Q'$ ;

(ii) $(PQ)' = P'Q + PQ'$.

(iii) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a la formule de Leibniz :

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

**Proposition C4.14 (Formule de Taylor)**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Soit $a \in \mathbb{K}$. Alors

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

## 2 Arithmétique des polynômes

### 2.1 Division euclidienne

**Définition C4.15 (Divisibilité)**

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $A$ **divise** $B$, ou que $B$ est **divisible** par (ou **un diviseur**) de $A$, et on note $A \mid B$ s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = A \times Q$. On dit alors aussi que $B$ est un **multiple** de $A$.

**Proposition C4.16**

Soit $A, B, C, D, U, V \in \mathbb{K}[X]$.

(i) Si $B \neq 0$ et $A \mid B$, alors $\deg A \leqslant \deg B$.

(ii) Si $A \mid B$ et $A \mid C$, alors $A \mid (UB + VC)$.

(iii) Si $A \mid B$ et $C \mid D$, alors $AC \mid BD$.

(iv) Si $(AB) \mid (AC)$ et $A \neq 0$, alors $B \mid C$.

**Proposition C4.17**

La relation de divisibilité est réflexive et transitive.

**Proposition et définition C4.18**

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $A \mid B$ et $B \mid A$.

(ii) $A \mid B$ et $\deg A = \deg B$.

(iii) $\exists \lambda \in \mathbb{K}^\times$, $A = \lambda B$.

Dans ce cas on dit que $A$ et $B$ sont **associés** et on note $A \sim B$.

**Théorème et définition C4.19 (Division euclidienne)**

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, $B$ étant différent du polynôme nul. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

- $A = BQ + R$,
- $\deg R < \deg B$.

On dit que $Q$ est le **quotient** et $R$ le **reste** de la division euclidienne de $A$ par $B$.

**Remarque.** C'est le degré qui joue ici le rôle d'indicateur de « stricte décroissance » du processus (variant de boucle dans l'algorithme d'Euclide notamment). Une telle fonction (valeur absolue sur $\mathbb{Z}$, deg sur $\mathbb{K}[X]$) s'appelle un **stathme euclidien**. Un anneau disposant d'une division euclidienne s'appelle un **anneau euclidien** et on peut y définir toutes les notions arithmétiques déjà vues sur $\mathbb{Z}$ et rappelées ici dans $\mathbb{K}[X]$.

## 2.2 PGCD, PPCM

**Notation.** Notons $\mathrm{Div}(A)$ l'ensemble des diviseurs d'un polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ et plus généralement $\mathrm{Div}(A_1, \dots, A_n) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \forall i \in [\![1, n]\!],\ P \mid A_i\}$.

**Lemme C4.20**

(i) Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Div}(A, 0) = \mathrm{Div}(A)$.

(ii) Si $A = BQ + R$, avec $A, B, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, alors $\mathrm{Div}(A, B) = \mathrm{Div}(B, R)$.

**Proposition et définition C4.21**

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

(i) Il existe $D \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Div}(A, B) = \mathrm{Div}(D)$. Un tel polynôme est appelé **un plus grand commun diviseur (PGCD)** de $A$ et $B$.

(ii) Tous les PGCD de $A$ et $B$ sont associés.

(iii) Si $A \neq 0$ ou $B \neq 0$, les PGCD de $A$ et $B$ sont les éléments de $\mathrm{Div}(A, B)$ de degré maximal. Parmi eux, un seul est unitaire, appelé **le PGCD** de $A$ et $B$, noté $A \wedge B$.

(iv) Par convention, si $A = B = 0$, $A \wedge B = 0$.

**Proposition et définition C4.22**

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

(i) Si $A \neq 0$ ou $B \neq 0$, tout multiple commun à $A$ et $B$ de degré minimal est appelé **un plus petit commun multiple** de $A$ et $B$. Tous les PPCM de $A$ et $B$ sont associés. Parmi eux, un seul est unitaire, appelé **le PPCM** de $A$ et $B$, noté $A \vee B$.

(ii) Par convention, si $A = B = 0$, $A \vee B = 0$.

**Remarque.** On importe du cas de $\mathbb{Z}$ les propriétés sur les PGCD et PPCM, ainsi que l'algorithme d'Euclide pour déterminer un PGCD. On étend également ces définitions au cas d'un nombre fini de polynômes.

**Proposition C4.23**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots A_n \in \mathbb{K}[X]$.

(i) $\forall D \in \mathbb{K}[X],\ D \mid \left(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i\right) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ D \mid A_i$.

(ii) $\forall M \in \mathbb{K}[X],\ \left(\bigvee_{i=1}^{n} A_i\right) \mid M \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ A_i \mid M$.

## 2.3 Bézout

**Théorème C4.24**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots A_n \in \mathbb{K}[X]$. Il existe $U_1, \dots, U_n \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\sum_{i=1}^{n} A_i U_i = \bigwedge_{i=1}^{n} A_i$.

**Proposition C4.25**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots A_n \in \mathbb{K}[X]$ et $B$ un polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$.

(i) $\bigwedge_{i=1}^{n} (BA_i) = B\left(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i\right)$.

(ii) si $n \neq 0$, alors $\bigvee_{i=1}^{n} (BA_i) = B\left(\bigvee_{i=1}^{n} A_i\right)$.

**Définition C4.26**

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $A$ et $B$ sont **premiers entre eux** lorsque $A \wedge B = 1$.

**Définition C4.27**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots A_n \in \mathbb{K}[X]$.

(i) On dit que les $A_1, \dots, A_n$ sont **premiers entre eux dans leur ensemble** lorsque

$$\bigwedge_{i=1}^{n} A_i = 1.$$

(ii) On dit que les $A_1, \dots, A_n$ sont **premiers entre eux deux à deux** lorsque

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ i \neq j \Rightarrow A_i \wedge A_j = 1.$$

**Théorème C4.28 (Bézout)**

(i) Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. $A \wedge B = 1 \Leftrightarrow \exists U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$.

(ii) $\displaystyle\bigwedge_{i=1}^{n} A_i = 1 \Leftrightarrow \exists U_1, \dots, U_n, \sum_{i=1}^{n} A_i U_i = 1.$

**Proposition C4.29**

Soit $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$.

(i) Si $A \wedge B = 1$ et $C \mid B$, alors $A \wedge C = 1$.

(ii) Si $A \wedge B = 1$ et $A \wedge C = 1$, alors $A \wedge (BC) = 1$.

(iii) Si $A \wedge B = 1$, alors $\forall p, q \in \mathbb{N},\ A^p \wedge B^q = 1$.

## 2.4 Gauß

**Théorème C4.30 (Gauß)**

Soit $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$. Alors

$$(A \mid BC \text{ et } A \wedge B = 1) \Rightarrow A \mid C$$

**Théorème C4.31**

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

(i) Si $A \wedge B = 1$, alors $A \vee B = AB$.

(ii) $(A \wedge B)(A \vee B) = AB$.

# 3 Racines d'un polynôme

## 3.1 Racines

**Définition C4.32**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que $\alpha$ est une **racine** ou un **zéro** de $P$ si $\widetilde{P}(\alpha) = 0$.

**Théorème C4.33**

(i) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors

$$\alpha \text{ est une racine de } P \quad \Leftrightarrow \quad (X - \alpha)|P.$$

(ii) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Alors

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_r \text{ sont racines de } P \quad \Leftrightarrow \quad \left(\prod_{i=1}^{r}(X - \alpha_i)\right)|P.$$

**Corollaire C4.34**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

(i) Tout polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $n$ admet au plus $n$ racines.

(ii) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n$ et $c_n$ son coefficients dominant. Si $P$ admet deux racines deux à deux distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, alors

$$P(X) = c_n \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i).$$

(iii) Tout polynôme de degré $n$ qui admet au moins $n + 1$ racines est le polynôme nul.

(iv) Soit $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Si $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $P(\alpha_i) = Q(\alpha_i)$, alors $P = Q$.

**Remarque.** Ceci montre la bijectivité de la correspondance entre polynômes et fonctions polynomiales $P \mapsto \widetilde{P}$. Ce résultat est généralisable avec $\mathbb{K}$ un corps quelconque, dès que ce dernier est infini.

### 3.2 Racines multiples

**Définition C4.35 (Racines multiples)**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

(i) On appelle **ordre de multiplicité** de $\alpha$ en tant que racine de $P$ l'entier $\nu_\alpha(P)$ défini par

$$\nu_\alpha(P) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid (X-\alpha)^k \mid P\}.$$

(ii) Une racine d'ordre 1 est une **racine simple**

(iii) Une racine d'ordre strictement supérieur à 1 est une **racine multiple**.

**Proposition C4.36**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors $\nu_\alpha(P) \geqslant p$ si et seulement si $(X-\alpha)^p \mid Q$.

**Proposition C4.37**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $\nu_\alpha(P) = p$,

(ii) $(X-\alpha)^p \mid P$ et $(X-\alpha)^p \nmid P$,

(iii) il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

- $P = (X-\alpha)^p Q$,
- $Q(\alpha) \neq 0$.

**Théorème C4.38 (Caractérisation de la multiplicité d'une racine)**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

(i) $\nu_\alpha(P) \geqslant p$ si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(p-1)}(\alpha) = 0$.

(ii) $\nu_\alpha(P) = p$ si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(p-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(p)}(\alpha) \neq 0$.

**Remarque.** Cette caractérisation, comme les précédents résultats sur les polynômes dérivés, ne s'étend qu'aux corps de caractéristique nulle.

**Proposition C4.39**

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.

(i) Si $\nu_\alpha(P) \geqslant 1$, alors $\nu_\alpha(P') = \nu_\alpha(P) - 1$.

(ii) si $P \mid Q$, alors $\nu_\alpha(P) \leqslant \nu_\alpha(Q)$,

(iii) $\nu_\alpha(PQ) = \nu_\alpha(P) + \nu_\alpha(Q)$,

(iv) $\nu_\alpha(P+Q) \geqslant \min\{\nu_\alpha(P), \nu_\alpha(Q)\}$ avec égalité si $\nu_\alpha(P) \neq \nu_\alpha(Q)$.

**Théorème C4.40**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ des éléments distinct de $\mathbb{K}$ et $\nu_1, \ldots \nu_r \in \mathbb{N}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\alpha_i$ est une racine de multiplicité $\nu_i$ de $P$.

(ii) Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P(X) = \left(\prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{\nu_i}\right) Q(X) \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, r]\!],\ Q(\alpha_i) \neq 0.$$

**Corollaire C4.41**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$. Alors le nombre de racines de $P$, comptées avec multiplicités, est inférieur ou égal à $n$. Autrement dit, si pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\alpha_i$ est une racine de multiplicité $\nu_i$ de $P$, alors

$$\sum_{i=1}^{r} \nu_i \leqslant n.$$

# 4 Factorisation dans $\mathbb{K}[X]$

**Définition C4.42**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $a_n$ son coefficient dominant. On dit que $P$ est **scindé sur** $\mathbb{K}$ s'il existe des scalaires $\alpha_k \in \mathbb{K}$ (pas nécessairement distincts) tels que

$$P = a_n(X - \alpha_1) \ldots (X - \alpha_n) = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - \alpha_k).$$

**Définition C4.43 (irréductibilité)**

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant. On dit que $P$ est irréductible si

$$P = AB \Rightarrow A \in \mathbb{K} \text{ ou } B \in \mathbb{K}.$$

**Proposition C4.44**

Les polynômes de degré 1 sont irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.

**Théorème C4.45 (Décomposition en produit d'irréductibles)**

Soit $P$ un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $m$ polynômes $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{K}[X]$ irréductibles et unitaires tels que

$$P = \alpha \prod_{k=1}^{m} P_k.$$

De plus $\alpha$ et l'ensemble des $P_k$ sont uniques.

## 4.1 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

**Théorème C4.46 (d'Alembert-Gauß)**

Soit $P$ un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$. Alors $P$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

**Théorème C4.47 (d'Alembert-Gauß)**

Dans $\mathbb{C}[X]$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1.

**Corollaire C4.48**

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il s'écrit sous la forme

$$P = a_n(X - \alpha_1)\dots(X - \alpha_n),$$

où les scalaires $\alpha_k$ sont les racines de $P$ comptées avec multiplicités, et $a_n$ son coefficient dominant.

**Corollaire C4.49**

Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ un polynôme unitaire et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ses racines complexes. Alors

(i) $a_0 = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \alpha_k$,

(ii) $a_{n-1} = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k$,

**Théorème C4.50 (Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$)**

Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n$ admet $n$ racines dans $\mathbb{C}$, comptées avec leurs multiplicités.

**Théorème C4.51**

Soit $A, B \in \mathbb{C}[X]$. Alors

$$A \mid B \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{C},\ \nu_\alpha(A) \leqslant \nu_\alpha(B).$$

**Proposition C4.52**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$X^n - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (X - \omega) = \prod_{k=0}^{n-1} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}).$$

## 4.2 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

**Théorème C4.53**

Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

**Théorème C4.54 (Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$)**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors $P$ peut s'écrire sous la forme

$$P = a \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k) \prod_{\ell=1}^{s} (X^2 + b_\ell X + c_\ell),$$

avec

- $a \in \mathbb{R}^*$ le coefficient dominant de $P$,
- $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ les racines réelles de $P$, non nécessairement distinctes,
- $(b_1, c_1), \ldots, (b_s, c_s) \in \mathbb{R}^2$ tels que, pour tout $1 \leqslant \ell \leqslant s$, on ait $\Delta_\ell = b_\ell^2 - 4c_\ell < 0$.