TD C4. Polynômes

1 Anneau des polynômes

Exercice C4.1 ✲

1. Déterminer les coefficients du polynôme $(1 + X + X^2 + \ldots + X^n)^2$.
2. En déduire les coefficients du polynôme $(1 - X + X^2 + \ldots + (-1)^n X^n)^2$.

Exercice C4.2 ✲

Calculer $P = (1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4) \ldots (1 + X^{2^n})$ *(indication : on pourra calculer $(1 - X)P$).*

Exercice C4.3 ✲

1. Soit $(T_n)_n$ la suite de polynômes définie par $\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = 2X \\ \forall n \geqslant 2,\, T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2} \end{cases}$. Déterminer le degré de T_n pour tout n.
2. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\Delta(P) = P(X + 1) - P(X)$. Déterminer le degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit Q_n un polynôme non nul vérifiant $Q_n'' - 3XQ_n' + 3nQ_n = 0$. Montrer que $\deg(Q_n) = n$.

Exercice C4.4 ✲

Trouver tous les polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant

1. $Q^2(X) = XP^2(X)$,
2. $P \circ P = P$,
3. $P(X^2) = P(X)$,
4. $P(X + 1) = XP(X)$,
5. $P'^2 = 9P$,
6. $P - XP' = X$.

Exercice C4.5 ✲

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré 28. Que vaut $P^{(28)}(28)$?

Exercice C4.6 ✲

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} P^{(k)}(X) X^{k+1}$ est l'unique primitive de P qui s'annule en 0.

Exercice C4.7 ✲✲

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$P(X + 1) - 2P(X) + P(X - 1) = 0.$$

(indication : on pourra utiliser des formules de Taylor, ou bien s'intéresser à la transformation $D(P) = P(X + 1) - P(X)$)

2 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice C4.8

Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

1. $A = X^5 + X^2 + 1$ et $B = X^3 - 3X^2 + 8X - 21$,
2. $A = 1 + 6X^2 + 4X^3 - 5X^4$ et $B = X^2 - 5X + 3$,
3. $A = X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ et $B = X^2 - X - 7$.

Exercice C4.9 ✲

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a, b \in \mathbb{K}$ distincts.

1. Calculer en fonction de $P(a)$ et $P(b)$ le reste dans la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.
2. Calculer en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$ le reste dans la division euclidienne de P par $(X - a)^2$.

Exercice C4.10 ✲

Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

1. $A = (X + 1)^n - X^n - 1$ et $B = (X - 1)(X - 2)$.
2. $A = (X + 1)^n - X^n - 1$ et $B = (X - 1)^2$.
3. $A = X^{2n} + 2X^n - 2$ et $B = (X - 2)^2$.
4. $A = X^n$ et $B = X^2 - X - 2$. En déduire les puissances de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (indication : on vérifiera que $M^2 = M + 2I_3$).

Exercice C4.11 ✲✲

Soit $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\cos(t) + \sin(t)X)^n$ par $X^2 + 1$.

Exercice C4.12 ✲✲

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. On suppose que dans la division euclidienne de P par $X - 1$, le reste est 3 ; par $X - 2$, le reste est 7 ; et par $X - 3$ le reste est 13. Déterminer le reste dans la division euclidienne de P par $(X - 1)(X - 2)(X - 3)$.
2. On suppose que dans la division euclidienne de P par $X^2 + 4$, le reste est $X - 9$; et par $X - 3$, le reste est 7. Déterminer le reste dans la division euclidienne de P par $(X^2 + 4)(X - 3)$.

Exercice C4.13 ✲

Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le PGCD de

1. $X^4 - X^2 + 2X - 2$ et $X^3 + X - 2$,
2. $X^5 - X^4 + 2X^3 - 2X^2 + 2x - 1$ et $X^5 - X^4 + 2X^2 - 2X + 1$,
3. $X^n - 1$ et $(X - 1)^n$,
4. $X^n - 1$ et $X^m - 1$.

3 Racines et factorisation

Exercice C4.14

Quel est l'ordre de la racine 1 dans le polynôme $X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$?

Exercice C4.15 ✲

Montrer que le polynôme $P = 1 + X + \dfrac{X^2}{2!} + \ldots + \dfrac{X^n}{n!}$ n'a pas de racine multiple.

Exercice C4.16 ✲

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, l'expression de $P(X)$ comme combinaison linéaire des polynômes $\{1, X - a, (X - a)^2, \ldots, (X - a)^n\}$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.
2. Déterminer deux réels a et b tels que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice C4.17 ✲✲

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si P est scindé, alors P' est scindé.

Exercice C4.18 ✲✲

Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme à coefficients entiers.

1. Montrer que si P admet une racine rationnelle $\dfrac{r}{q}$ avec $r \wedge q = 1$, alors r divise a_0 et q divise a_n.
2. Application : montrer que toutes les racines réelles de $4X^3 + 4X^2 + 5X - 4$ sont rationnelles.
3. Application encore plus cool : soit $k, d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si d n'est pas une puissance k-ième d'un entier, alors $\sqrt[k]{d}$ est irrationnel.

Exercice C4.19 ✲

Soit $n \geqslant 2$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ et $L_1, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} L_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k L_k$.

Exercice C4.20

Soit $P = X^4 - 5X^3 + 4X^2 + 3X + 9$.

1. Montrer que 3 est racine double de P.
2. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice C4.21 ✲

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) = n^2$.

Exercice C4.22 ✲

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P(0) = P(1) = P'(1) = 0$ et $P'(0) = 2$.
2. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(0) = P(1) = 2$ et $P'(0) = 0$.

Exercice C4.23 ✿✿

Soit $a, b \in \mathbb{C}$ et $P = X^3 + aX + b \in \mathbb{C}[X]$. Soit x, y, z les trois racines complexes de P, comptées avec multiplicité.

1. Exprimer $x^2 + y^2 + z^2$ et $x^3 + y^3 + z^3$ en fonction de a et b.
2. Si x, y et z sont non nulles, exprimer $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$ en fonction de a et b.

Exercice C4.24 ✿✿

Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ les systèmes suivants.

1. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ xyz = -2 \end{cases}$,
2. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{cases}$.

Exercice C4.25 ✿

1. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $Q = X^2 - 1$.
2. Soient $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. Montrer que Q divise $X^{4m+2} - 2X^{2n+1} + 2X^{2p+1} - X^{2q}$.

Exercice C4.26 ✿

Décomposer en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

1. $X^4 + X^2 + 1$,
2. $X^3 + 1$,
3. $X^6 + 1$,
4. $(X^2 - X + 1)^2 + 1$,
5. $X^3 + X^2 + X + 1$.
6. $X^8 + X^4 + 1$,

Exercice C4.27 ✿✿✿

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \exists (A, B) \in \mathbb{R}[X]^2,\ P = A^2 + B^2.$$