DEVOIR MAISON N° 14

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être $\boxed{\text{encadrés}}$.
La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.
Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

Soit E un ensemble fini de cardinal $n > 0$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle p-**partition** de E tout ensemble de p parties non vides de E (noté $\{A_1, \ldots, A_p\}$) qui vérifient :

- $E = A_1 \cup \ldots \cup A_p$,
- $\forall 1 \leqslant i \neq j \leqslant p$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Autrement dit les parties $A_1, \ldots, A_p$ forment une p-partition de E si elles sont non vides, deux à deux disjointes et que leur réunion est l'ensemble E tout entier.

On note enfin $P(n, p)$ le nombre de p-partitions d'un ensemble de cardinal n.

Exemple. Si $E = \{1, 2, 3\}$, on peut donner toutes les 2-partitions de E : $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, $\{\{2\}, \{1, 3\}\}$ et $\{\{3\}, \{1, 2\}\}$. Elles sont au nombre de 3. Ainsi, $P(3, 2) = 3$.

On définit $P(n, p)$ pour $n, p \in \mathbb{N}$ à l'aide des conventions suivantes : $P(0, 0) = 1$ et $\forall n, p \geqslant 1$, $P(0, p) = 0$ et $P(n, 0) = 0$.

Cas particuliers

1. Expliciter les 2-partitions de $\{1, 2, 3, 4\}$ pour justifier que $P(4, 2) = 7$.
2. Montrer que si $p > n \geqslant 1$, alors $P(n, p) = 0$.
3. Pour tout $n \geqslant 1$, déterminer $P(n, 1)$ et $P(n, n)$.
4. Pour tout $n \geqslant 2$, montrer que $P(n, 2) = 2^{n-1} - 1$.

Formule récursive

Soit $1 \leqslant p \leqslant n$ et E toujours de cardinal n. On fixe un élément $x \in E$. Pour construire une p-partition de E, on propose deux méthodes distinctes :

— $\boxed{\text{M1}}$ Prendre une $(p-1)$-partition de $E \setminus \{x\}$ et ajouter la partie $\{x\}$.

— $\boxed{\text{M2}}$ Prendre une p-partition de $E \setminus \{x\}$ et ajouter x à l'une de ses parties.

5. Déterminer le nombre de p-partitions de E obtenues par la méthode $\boxed{\text{M1}}$.
6. Déterminer le nombre de p-partitions de E obtenues par la méthode $\boxed{\text{M2}}$.
7. En déduire
$$P(n, p) = pP(n-1, p) + P(n-1, p-1).$$
8. Discuter la validité de cette formule pour $1 \leqslant n < p$.

Valeurs remarquables

9. Pour $n \geqslant 1$, on note $u_n = P(n, n-1)$. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par (u_n) et en déduire que $u_n = \binom{n}{2}$.
10. Pour $n \geqslant 0$, on note $v_n = \frac{1}{3^n} P(n, 3)$.
    (a) Donner les valeurs de v_1, v_2, v_3 et v_4.
    (b) Exprimer simplement $v_{n+1} - v_n$.
    (c) En déduire la valeur de v_n puis de $P(n, 3)$ pour $n \geqslant 3$.

Hommage à Eric Temple Bell

11. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall n, p \in \mathbb{N},\ P(n+1, p+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P(k, p) = \sum_{k=p}^{n} \binom{n}{k} P(k, p).$$

12. Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle **nombre de Bell**, noté B_n, le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n, c'est-à-dire la somme des nombres de k-partitions pour tous les k possibles. Ainsi,

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} P(n, k).$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i$.

Problème 2

Le but de l'exercice est de trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que :

$$P(X^2) = P(X)P(X-1). \tag{1}$$

(On précise si besoin que $P(X)$, $P(X^2)$ et $P(X-1)$ désignent bien le polynôme P composé avec respectivement X, X^2 et $X-1$, et en aucun cas le produit de P par X, X^2 ou $X-1$)

1. Trouver tous les polynômes constants qui vérifient l'équation (1).
2. Donner la factorisation en produit d'irréductibles du polynôme $X^4 + X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
3. En déduire que le polynôme $X^2 + X + 1$ vérifie l'équation (1).

Dans la suite du problème, on suppose que le polynôme P est non constant et vérifie l'équation (1).

4. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que si α est une racine de P alors α^2 et $(\alpha+1)^2$ sont également des racines de P.
5. On suppose que 0 est une racine du polynôme P et on définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (u_n + 1)^2$.
    (a) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
    (b) Montrer que la suite (u_n) n'est pas convergente. En déduire le comportement de (u_n) quand n tend vers $+\infty$.
    (c) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(u_n) = 0$.

(d) En déduire que 0 n'est pas une racine de P.

6. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ une racine de P.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, α^{2^n} est une racine de P.
   (b) En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha^k = 1$.
   (c) Montrer que $|\alpha| = |\alpha + 1| = 1$.
   (d) A l'aide de la condition précédente, trouver toutes les racines de P.

7. Montrer que l'ensemble des solutions non nulles de l'équation (1) est l'ensemble des polynômes $P = (X^2 + X + 1)^m$ où $m \in \mathbb{N}$.