Problème 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'objet de ce problème est l'étude des matrices orthogonales. Dans tout le problème, I_n désigne la matrice identité de taille n et 0_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Définition 1

*Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que la matrice M est **orthogonale** lorsque $MM^\intercal = MM^\intercal = I_n$.*

On notera traditionnellement $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille $n \in \mathbb{N}^*$

A Généralités

1. $A^{-1}B = A^{-1}BAA^{-1} = A^{-1}ABA^{-1} = BA^{-1}$ donc $\boxed{A^{-1} \text{ et } B \text{ commutent}}$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons que $M^\intercal M = I_n$ *on dit que $M^\intercal$ est l'inverse de M* ***à gauche***.
   Montrons qu'on a alors aussi $MM^\intercal = I_n$ (*i.e.* que c'est aussi l'inverse à droite).
   - Montrons tout d'abord que M a un inverse à droite.
     L'équation $MX = aI_n$ d'inconnues $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ est un système linéaire (homogène) à n^2 équations (l'identification de tous les coefficients) et $n^2 + 1$ inconnues (les coefficients de X et a). Donc ce n'est pas un système de Cramer. Comme il est homogène, il a une infinité de solutions. En particulier on peut lui trouver une solution non triviale (*i.e.* non nulle) X_0 et $a_0 \neq 0$.
     (en effet, si $a_0 = 0$, $MX_0 = 0$, d'où $M^\intercal MX_0 = 0$, soit $X_0 = 0$ et la solution est en fait la solution nulle.)
     Finalement $M \times \left(\dfrac{1}{a_0}X_0\right) = I_n$.
   - Il reste à montrer que $\dfrac{1}{a_0}X_0 = M^\intercal$ (*i.e.* que l'inverse à droite et à gauche sont identiques).
     Autrement dit, montrons que si deux matrices N_1 et N_2 sont telles que $N_1M = MN_2 = I_n$, alors $N_1 = N_2$. Ceci est assez simple : $N_1 = N_1I_n = N_1(MN_2) = (N_1M)N_2 = N_2$.

   Finalement $\boxed{M \text{ est orthogonale}}$.
3. Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. D'après la définition, M est inversible et son inverse est $M^\intercal$.
   Comme $(M^\intercal)^\intercal M^\intercal = MM^\intercal = I_n$, on a aussi $M^\intercal = \boxed{M^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$.
4. Soit $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
   (a) $\boxed{\text{Non}}$. Par exemple $I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $-I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ mais $I_n - I_n = 0 \notin \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
   (b) $(AB)^\intercal AB = B^\intercal A^\intercal AB = B^\intercal I_n B = I_n$ donc $\boxed{AB \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$ (cette seule vérification suffit d'après la question 2).

B Matrices orthogonales de taille 2

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ que l'on suppose de plus orthogonale.

5. $M^\intercal M = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$ et $MM^\intercal = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$.
L'identification de ces deux matrices avec I_2 donne

$$\boxed{a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1,\ a^2+c^2 = b^2+d^2 = 1 \text{ et } ac+bd = 0}.$$

6. Supposons dans cette question que $a = 0$. Dans ce cas, $b^2 = 1$ donc $\boxed{b = \pm 1}$.
Puis $ac + bd = 0$ donne aussi $d = 0$.
Et $c^2 + d^2 = 1$ donne $c^2 = \pm 1$.
Les deux valeurs possibles pour b et c donnent quatre matrices possibles :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

7. Supposons maintenant que $a \neq 0$.
   (a) cos est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$, à valeurs entre 1 et -1. Donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $\cos t = a$ admet exactement une solution $t_1 \in [0, \pi]$.
   De même cos est continue et strictement croissante sur $[\pi, 2\pi]$, à valeurs entre -1 à 1. Donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $\cos t = a$ admet exactement une solution $t_2 \in [\pi, 2\pi]$.
   De plus $\cos(t_1) = \cos(2\pi - t_1)$ et $2\pi - t_1 \in]0, 2\pi[$, donc $t_2 = 2\pi - t_1$.
   Ceci donne deux solutions t_1 et t_2 dans $[0, 2\pi]$, éventuellement confondues si et seulement si $t_1 = t_2 = \pi$.
   Puis $\forall t \in \{t_1, t_2\}$, $\cos t = a$.
   Dans ce cas, $\sin^2 t = 1 - a^2 = c^2$. Donc $\sin t = \pm c$. Comme $\sin(2\pi - t) = -\sin(t)$, on a $\sin(t_1) = c$ et $\sin(t_2) = -c$ ou l'inverse.
   Il suffit de choisir t de sorte que $\sin(t) = c$.
   Enfin $\boxed{t \in [0, 2\pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right\}}$ car si 2π convient, alors 0 convient aussi, et comme $a \neq 0$, $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ ne sont pas solution.
   (b) Puis comme $a^2 + b^2 = 1$, on a $b^2 = \sin^2(t)$, donc $b = \sin t$ ou $b = -\sin(t)$.
   Enfin $b^2 + d^2 = 1$ donne $d = \cos t$ ou $d = -\cos t$.
   Mais comme $ac+bd = 0$, $bd = -\sin(t)\cos(t)$, ce qui ne laisse que deux possibilités : $\begin{cases} b = \sin t \\ d = -\cos t \end{cases}$
   ou $\begin{cases} b = -\sin t \\ d = \cos t \end{cases}$.
   D'où les deux matrices suivantes : $\boxed{\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}}$.

8. Les valeurs $t = \frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ dans la forme précédente donnent les quatre matrices de la question 6.
Finalement $\boxed{\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\right\}}$.

C Matrices orthogonales particulières

Soit $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

9. Supposons M orthogonale.
   (a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $[MM^\intercal]_{ii} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}[M^\intercal]_{ki} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}m_{ik}$. Par identification avec la matrice identité (où les coefficients diagonaux valent 1), on a bien $\boxed{\sum_{k=1}^{n} m_{ik}^2 = 1}$.
   (b) Comme $m_{ik}^2 \geqslant 0$ pour tout k, on a pour tout $j \in [\![1,n]\!]$: $m_{ij}^2 = 1 - \sum_{\substack{k\in[\![1,n]\!]\\ k\neq j}} m_{ik}^2 \leqslant 1$. Donc $|m_{ij}| \leqslant 1$.
   Ceci est toujours valable pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.
   Donc $\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ |m_{ij}| \leqslant 1}$.
10. On s'intéresse au cas où tous les coefficients de M sont des nombres entiers.
   (a) Dans le cas où les coefficients sont entiers, alors ils valent 0, 1 ou -1, donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $|m_{ij}| =$ 0 ou 1.
   Ainsi la somme $\sum_{k=1}^{n} m_{ik}^2$ comporte exactement un terme égal à 1 et $n-1$ termes nuls. Ce qui donne un seul coefficient non nul sur la ligne i, valant 1 ou -1.
   On peut faire le même raisonnement sur les colonnes en reprenant l'étude précédente avec $M^\intercal M = I_n$.
   Ainsi, on a $\boxed{\text{un seul coefficient non nul par ligne et par colonne, valant } +1 \text{ ou } -1}$.
   (b)
   - Sur la diagonale : soit $i \in [\![1,n]\!]$. $[MM^\intercal]_{ii} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}^2$. Un seul des coefficients de la ligne i est non nul et vaut ± 1, donc $[MM^\intercal]_{ii} = 1$.
   - Hors de la diagonale : soit $i, j \in [\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$. $[MM^\intercal]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}m_{jk}$. Pour tout k, il y a dans la colonne k un seul coefficient non nul. Donc m_{ik} ou m_{jk} est nul. Donc $[MM^\intercal]_{ij} = 0$.

   Finalement $\boxed{MM^\intercal = I_4}$.
   (c) Exemple de telle matrice orthogonale de taille 4 non diagonale : $\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

D Construction de matrices orthogonales

11. Un exemple : soit $I_3 + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) En appliquant l'algorithme de Gauß-Jordan par exemple,
   $\boxed{I_3 + B \text{ est inversible}}$ et $\boxed{(I_3+B)^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}}$.

(b) On obtient $\boxed{M = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -6 \\ -6 & -3 & -2 \\ -2 & 6 & -3 \end{pmatrix}}$.

(c) Le calcul de $M^{\mathsf{T}}M$ donne $\dfrac{1}{49}\begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix}$. Donc $\boxed{M \text{ est une matrice orthogonale}}$.

Avant d'établir une généralisation, montrons un résultat pratique.

12. Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $\varphi(Y) = {}^{\mathsf{T}}YY = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ Donc $\boxed{\varphi(Y) \geqslant 0}$. Comme $y_i^2 \geqslant 0$ pour tout i, $\varphi(Y) = 0$ si et seulement si tous les termes de la somme sont nuls, *i.e.* $Y = 0_n$.

13. Généralisation : soit $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **antisymétrique**, c'est-à-dire telle que $A^{\mathsf{T}} = -A$.
Soit (S) le système linéaire homogène dont $I_n + A$ est la matrice ; on représente une solution de ce système par une matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $(I_n + A)X = 0_n$.
   (a) Comme $(I_n + A)X = 0_n$, on a $X + AX = 0_n$, soit $AX = -X$.
   D'où $A^{\mathsf{T}}AX = -AAX = AX = \boxed{-X}$.
   (b) $\varphi(AX) = {}^{\mathsf{T}}XA^{\mathsf{T}}AX = {}^{\mathsf{T}}X(-X) = -{}^{\mathsf{T}}XX = \boxed{-\varphi(X)}$.
   Ainsi d'après12, $\varphi(AX)$ est à la fois positif et négatif, donc nul, ainsi que $\varphi(X)$. Et donc toujours d'après12, $X = 0_n$.
   (c) On vient de montrer que la seule solution du système (S) est la solution triviale. Ainsi c'est un système de Cramer, dont la matrice $\boxed{I_n + A \text{ est inversible}}$.
   (d) Le raisonnement précédent est valable pour toute matrice antisymétrique. Or si A est antisymétrique, alors $-A$ l'est aussi. Donc le résultat précédent montre que $\boxed{I_n - A \text{ est inversible}}$.

14. On pose $M = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$.
   (a) Comme A est antisymétrique, ${}^{\mathsf{T}}(I_n + A) = I_n - A$ et ${}^{\mathsf{T}}(I_n + A) = I_n - A$.
   Ainsi $M^{\mathsf{T}} = \left({}^{\mathsf{T}}(I_n + A)\right)^{-1} {}^{\mathsf{T}}(I_n - A) = \boxed{(I_n - A)^{-1}(I_n + A)}$.
   (b) Puis $M^{\mathsf{T}}M = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$. De plus $(I_n + A)(I_n - A) = (I_n - A)(I_n + A)$ car ce sont des polynômes en A (on peut développer pour se convaincre).
   Donc $M^{\mathsf{T}}M = (I_n - A)^{-1}(I_n - A)(I_n + A)(I_n + A)^{-1} = I_n$.
   Ceci suffit à montrer que $\boxed{M \text{ est orthogonale}}$ d'après la question 1.

Problème 2

Soit $M = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 12 & -12 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, donc $\boxed{A^2 = 3A}$

(b) On remarque que $M = A + I_3$. Comme M et I_3 commutent ($MI_3 = I_3M = M$), on peut appliquer la formule du binôme. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k I^{n-k}$.

Or d'après ce qui précède, on montre par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = 3^{k-1}A$. De plus $A^0 = I_3$.

D'où $M^n = I_3 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} A = I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} \right) A$.

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k - 1 \right) = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ en reconnaissant une formule du binôme sur les nombres réels.

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ M^n = I_3 + \frac{1}{3}(4^n - 1)A}$.

2. $M^2 = \begin{pmatrix} 21 & -20 & -5 \\ 5 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \boxed{5M - 4I_3}$.

(a) **Init.** $M^0 = a_0 M + b_0 I_3$ avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

Hér. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $M^n = a_n M + b_n I_3$.

Alors $M^{n+1} = a_n M^2 + b_n M = a_n(5M - 4I_3) + b_n M = (5a_n + b_n)M - 4a_n I_3$.

En posant $a_{n+1} = 5a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$, on a $M^{n+1} = a_{n+1}M + b_{n+1}I_3$.

On a donc montré par récurrence qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = a_n M + b_n I_3.$$

Elles vérifient $\boxed{\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases}, \begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a_{n+1} = 5a_n + b_n \\ b_{n+1} = -4a_n \end{cases}}$.

(b) La relation de récurrence donne pour tout n, $a_{n+2} = 5a_{n+1} + b_{n+1}$, d'où $\boxed{a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n}$.

Elle donne aussi $b_{n+2} = -4a_{n+1}$, d'où $b_{n+2} = -4(5a_n + b_n) = 5 \times (-4a_n) - 4b_n$. Mais $-4a_n = b_{n+1}$.

Finalement, $\boxed{b_{n+2} = 5b_{n+1} - 4b_n}$.

(c) Étude de la relation de récurrence $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 4x_n$:

l'équation caractéristique est $X^2 - 5X + 4 = 0$, de racines 4 et 1.

Donc les suites solutions sont de la forme $(\lambda 4^n + \mu)_n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$ donne $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ 4\lambda + \mu = 1 \end{cases}$, soit $\begin{cases} \lambda = \frac{1}{3} \\ \mu = -\frac{1}{3} \end{cases}$.

  Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)}$.

- $\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = 0 \end{cases}$ donne $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 4\lambda + \mu = 0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} \lambda = -\frac{1}{3} \\ \mu = \frac{4}{3} \end{cases}$.

  Finalement, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = -\frac{1}{3}(4^n - 4)}$.

(d) Finalement $\boxed{M^n = a_n M + b_n I_3 = \frac{1}{3}(4^n - 1)M - \frac{1}{3}(4^n - 4)I_3}$.

En utilisant $M = A + I_3$, on obtient $M^n = \frac{1}{3}(4^n - 1)A + \underbrace{\left(\frac{1}{3}(4^n - 1) - \frac{1}{3}(4^n - 4)\right)}_{=1} I_3$.

On retrouve le résultat de la question 1b.

3. (a) À l'aide du pivot de Gauß (commencer par $L_1 \leftrightarrow L_3$), on obtient $\boxed{\lambda_1 = 1 \text{ et } \lambda_2 = 4}$.

   (b) La résolution des systèmes donne par exemple $\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$.

   (c) On a alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. D'après ce qui précède, $\boxed{MP = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}$.

   (d) Par la méthode de votre choix, on obtient $\boxed{P \text{ est inversible } P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$.

   (e) On montre par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}}$.

   D'après la question précédente, P étant inversible, on a $M = PDP^{-1}$. On montre alors par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ M^n = PD^nP^{-1}}$.

4. Une petite dernière.

   (a) On procède par récurrence.

   $\boxed{\text{Init.}}$ $M^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 5 + 4u_0 & -4 - 4u_0 & -1 - u_0 \\ u_0 + 1 & -u_0 & -1 - u_0 \\ 0 & 0 & 3u_0 + 4 \end{pmatrix}$ avec $u_0 = -1$.

   $\boxed{\text{Hér.}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe u_n tel que $M^n = \begin{pmatrix} 5 + 4u_n & -4 - 4u_n & -1 - u_n \\ u_n + 1 & -u_n & -1 - u_n \\ 0 & 0 & 3u_n + 4 \end{pmatrix}$.

   Alors $M^{n+1} = M^n \times M = \begin{pmatrix} 5 + 4u_n & -4 - 4u_n & -1 - u_n \\ u_n + 1 & -u_n & -1 - u_n \\ 0 & 0 & 3u_n + 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   D'où $M^{n+1} = \begin{pmatrix} 21 + 16u_n & -20 - 16u_n & -5 - 4u_n \\ 4u_n + 5 & -4u_n - 4 & -5 - 4u_n \\ 0 & 0 & 12u_n + 16 \end{pmatrix}$.

   Cela donne $M^{n+1} = \begin{pmatrix} 5 + 4(4 + 4u_n) & -4 - 4(4 + 4u_n) & -1 - (4 + 4u_n) \\ (4u_n + 4) + 1 & -(4u_n + 4) & -1 - (4 + 4u_n) \\ 0 & 0 & 3(4 + 4u_n) + 4 \end{pmatrix}$.

   En posant $u_{n+1} = 4u_n + 4$, on a $M^{n+1} = \begin{pmatrix} 5 + 4u_{n+1} & -4 - 4u_{n+1} & -1 - u_{n+1} \\ u_{n+1} + 1 & -u_{n+1} & -1 - u_{n+1} \\ 0 & 0 & 3u_{n+1} + 4 \end{pmatrix}$.

   La suite ainsi définie vérifie $\boxed{\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 4u_n + 4 \end{cases}}$.

(b) On étudie la suite arithmético-géométrique (u_n). Pour cela on démontre que $(u_n + \frac{4}{3})_n$ est géométrique et vérifie $u_{n+1} + \frac{4}{3} = 4(u_n + \frac{4}{3})$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } u_n = \frac{1}{3}(4^n - 4)}$.

Cela donne bien $M^n = M + u_n A = (A + I) + u_n A = I_3 + \frac{1}{3}(4^n - 1)A$.

5. Division euclidienne de X^n par $X^2 - 5X + 4$: il existe $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $X^n = (X^2 - 5X + 4)Q + R$ et $R = \alpha X + \beta \in \mathbb{R}_1[X]$.

L'évaluation de cette égalité en 1 et 4, racines de $X^2 - 5X + 4$, donne

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 4\alpha + \beta = 4^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{4^n - 1}{3} \\ \beta = \dfrac{4 - 4^n}{3} \end{cases}.$$

Finalement $M^n = R(M) = \alpha M + \beta I_3 = \boxed{\frac{1}{3}(4^n - 1)M - \frac{1}{3}(4^n - 4)I_3}$, comme en 2d.