

Programme de colle 19 : du 03/03 au 07/03

Polynômes

- Définition, opérations (dont la formule du produit de Cauchy), structure d'anneau intègre, éléments inversibles.
- Degré et coefficient dominant d'un polynôme, d'un produit, d'une somme, d'une composée.
- Fonction polynomiale, évaluation (morphisme d'évaluation).
- Polynômes dérivés, degré, formule de Leibniz, formule de Taylor.
- Arithmétique des polynômes (divisibilité, division euclidienne, PGCD, PPCM, Bézout, Gauß).
- Racines : caractérisations par l'évaluation et la divisibilité.
- Méthode de Horner pour évaluer en α ou diviser par $(X - \alpha)$.
- Racines multiples : ordre de multiplicité, propriétés, caractérisations par l'évaluation des dérivées successives et la divisibilité.
- Factorisation d'un polynôme de degré n dont on connaît des racines/toutes les racines.
- Formules de Viète.

Exercices abordés dans le TD C4 : 1, 4, 8, 9, 10, 14, 17, 21, 23.

Questions de cours

- Degré d'une somme et d'un produit de polynômes.
- Énoncé et démonstration de la formule de Taylor.
- Énoncé du théorème de division euclidienne des polynômes et démonstration de l'unicité.
- Expression du reste de la division euclidienne d'un polynôme P par $(X - a)(X - b)$, par $(X - a)^2$.
- Définition de l'ordre de multiplicité $\nu_\alpha(P)$ d'une racine α de P et caractérisation de $\nu_\alpha(P) \geq k$.

Remarques

- Le programme nous invite à énoncer les résultats d'arithmétique sans redémontrer ni nous étendre sur ceux qui sont analogues au cas de \mathbb{Z} .
- Les techniques de factorisation systématique d'un polynôme n'ont pas encore été entraînées, on ne factorise que par des $(X - \alpha)$ pour l'instant.
- Les relations entre coefficients et racines ont été énoncées dans le cas général, mais entraînées dans le cas d'un degré 2 ou 3 principalement.
- En plus du savoir-faire, il est important de savoir énoncer les définitions des notions ou les théorèmes employés.

Recommandations générales

La colle commencera par une question de cours. On vérifiera également au fil des exercices que le cours est maîtrisé. Si c'est le cas, la note finale est à deux chiffres. Sinon, impossible de dépasser 10.