Chapitre B6

Comparaisons locales

Objectifs

- Notions d'équivalence, de domination et de négligeabilité.
- Lien avec le comportement asymptotique.

1 Les trois relations

Définition B6.1

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles, (v_n) ne s'annulant pas àpcr.

(i) On dit que (u_n) est **négligeable devant** (v_n) lorsque $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et on note $u_n = o(v_n)$.

(ii) On dit que (u_n) et (v_n) sont **équivalentes** lorsque $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et on note $u_n \sim v_n$.

(iii) On dit que (u_n) est **dominée par** (v_n) lorsque $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est majorée et on note $u_n = O(v_n)$.

Notations. La notation $\sim$ est incomplète. On devrait plutôt écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, et de même $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$ et $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$.

Définition B6.2

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur D et $a \in \overline{D}$. En a,

(i) on dit que f est **négligeable devant** g lorsque $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et on note $f = o(g)$.

(ii) on dit que f et g sont **équivalentes** lorsque $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$ et on note $f \sim g$.

(iii) On dit que f est **dominée par** g lorsque $\dfrac{f}{g}$ est majorée et on note $f = O(g)$.

Notations. La notation $\sim$ est incomplète. On devrait plutôt écrire $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$. On note de même $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ et $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$.

Exemples.

- $n \underset{n\to+\infty}{=} o(n^2)$, $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$,
- $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
- $n+28 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, $n^2+28n+496 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2$.

Théorème B6.3

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Alors

$$u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n - v_n = o(v_n).$$

Exemples.

- En $+\infty$: $x \underset{x\to\infty}{=} o(x^2)$, $\dfrac{1}{x^2} \underset{x\to\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$,
- En 0 : $x^3 \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$, $\quad x^2 \underset{x\to 0}{=} o(x)$.
- $x+28 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, $x^2+28x+496 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$

Théorème B6.4

Soit f et g deux fonctions réelles. Alors

$$f \sim g \Leftrightarrow f - g = o(g).$$

Dém. B6.4

$$f-g=o(g) \Leftrightarrow \frac{f-g}{g} \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{f}{g}-1 \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{f}{g} \longrightarrow 1 \Leftrightarrow f \sim g.$$

Exemple. $x^2+x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ car $x=o(x^2)$. Voir aussi que $x^2+x = x^2 \underbrace{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}_{\to 1}$.

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence, c'est-à-dire :

Proposition B6.5

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{K}^n$.

Proposition B6.6

La relation $\sim$ est

réflexive : $f \sim f$;

symétrique : $f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$;

transitive : $\left.\begin{array}{c} f\sim g \\ g \sim h \end{array}\right\} \Rightarrow f \sim h.$

Remarques.

- Dire $u_n = o(1)$ revient à dire $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Si $\ell \neq 0$, $u_n \sim \ell$ revient à dire $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Remarques.

- Dire $f=o(1)$ revient à dire $f \xrightarrow[x\to a]{} 0$.
- Si $\ell \neq 0$, $f \underset{a}{\sim} \ell$ revient à dire $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

Remarques.

- On a aussi $f \sim g \Leftrightarrow f-g=o(f)$. Comprendre que f et g sont équivalentes si et seulement si leur différence est négligeable devant l'une des deux, *i.e.* leur ordre de grandeur (commun !).
- On peut avoir $f \sim g$ sans que $f-g$ soit « petit » dans l'absolu. Par exemple $x^2+x \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$ et leur différence vaut x, qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Mais on a $x=o(x^2)$.
- Quand on donne un équivalent, inutile de donner plusieurs termes de différents ordres de grandeur. Par exemple, $x^2+x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2+x$ est vrai mais inopérant car on a aussi $x^2+x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2+28x$. Le seul équivalent immuable et donc le seul intéressant est $x^2+x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$.

2 Utilisation

Proposition B6.7 (Comparaison et limites)

Étant données deux suites (u_n) et (v_n) à valeurs positives,

$$\left.\begin{array}{r} u_n \sim v_n \\ v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell;$$

$$\left.\begin{array}{r} u_n = o(v_n) \\ v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0;$$

$$\left.\begin{array}{r} u_n = o(v_n) \\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Proposition B6.8 (Comparaison et limites)

Étant données deux fonctions f et g à valeurs positives,

$$\left.\begin{array}{r} f \sim g \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell;$$

$$\left.\begin{array}{r} f = o(g) \\ g \xrightarrow[x\to a]{} 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \xrightarrow[x\to a]{} 0;$$

$$\left.\begin{array}{r} f = o(g) \\ f \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow g \xrightarrow[x\to a]{} +\infty.$$

3 Calcul

Proposition B6.9

Soit $u_n \sim a_n$ et $v_n \sim b_n$ définissant quatre suites réelles. Alors

(i) $u_n v_n \sim a_n b_n$;

(ii) si u_n et v_n ne s'annulent pas àpcr, $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{a_n}{b_n}$;

(iii) si $u_n \geqslant 0$ àpcr, alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition B6.10

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f \underset{a}{\sim} u$ et $g \underset{a}{\sim} v$ définissant quatre fonctions réelles. Alors

(i) $fg \underset{a}{\sim} uv$;

(ii) si g et v ne s'annulent pas, alors $\dfrac{f}{g} \underset{a}{\sim} \dfrac{u}{v}$;

(iii) si $f \geqslant 0$, alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} u^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dém. B6.10

(i) $\dfrac{fg}{uv} = \dfrac{f}{u}\dfrac{g}{v}$ donc : si $\dfrac{f}{u} \to 1$ et $\dfrac{g}{v} \to 1$, alors $\dfrac{fg}{uv} \to 1$.

(ii) $\dfrac{f/g}{u/v} = \dfrac{f}{g}\dfrac{v}{u}$ ...

(iii) $\dfrac{f^\alpha}{u^\alpha} = \left(\dfrac{f}{u}\right)^\alpha = e^{\alpha\ln(f/u)}$ donc si $\dfrac{f}{u} \to 1$, $\ln(f/u) \to 0$, donc $\dfrac{f^\alpha}{u^\alpha} \to 1$.

Remarque. ⚠ Attention !

- On ne somme pas d'équivalents : soit $f(x) = x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ et $g(x) = -x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} -x^2$. Bien sûr on ne peut absolument pas écrire que $f + g \sim 0$, c'est pire que faux !
Contre-exemple (légèrement) moins stupide : $x + 1 \sim x + 2$ et $-x \sim -x$ mais on n'a pas $1 \sim 2$.

- On ne compose pas les équivalents à gauche (en particulier on ne les passe pas au log ou à l'exponentielle). Contre-exemple : $x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x$ mais $e^{x+1} = ee^x$ qui n'est pas équivalent à e^x.

Proposition B6.11

Soit $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

(i) $\left.\begin{array}{l} u_n = o(w_n) \\ v_n = o(w_n) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha u_n + \beta v_n = o(w_n)$,

(ii) $\left.\begin{array}{l} u_n = o(v_n) \\ v_n = o(w_n) \end{array}\right\} \Rightarrow u_n = o(w_n)$,

(iii) Si $u_n = o(w_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n v_n)$.

Proposition B6.12

Soit f, g et h trois fonctions réelles et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

(i) $\left.\begin{array}{l} f = o(h) \\ g = o(h) \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha f + \beta g = o(h)$,

(ii) $\left.\begin{array}{l} f = o(g) \\ g = o(h) \end{array}\right\} \Rightarrow f = o(h)$,

(iii) Si $f = o(h)$, alors $fg = o(hg)$.

Dém. B6.12

(i) $\dfrac{\alpha f + \beta g}{h} = \alpha \dfrac{f}{h} + \beta \dfrac{g}{h}$ (ii) $\dfrac{f}{h} = \dfrac{f}{g}\dfrac{g}{h}$ (iii) $\dfrac{fg}{hg} = \dfrac{f}{h}$.

Proposition B6.13 (Suites de référence)

Soient $x > 1$ et $\alpha, \beta > 0$. Alors

- $(\ln n)^\beta = \underset{n\to\infty}{o}(n^\alpha)$,
- $n^\alpha = \underset{n\to\infty}{o}(x^n)$,
- $x^n = \underset{n\to\infty}{o}(n!)$,
- $n! = \underset{n\to\infty}{o}(n^n)$.

Proposition B6.14 (Croissances comparées)

Soient $\alpha, \beta, \gamma > 0$ avec $\alpha < \beta$. Alors

(i) En 0 :
$|\ln x|^\gamma = o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ et $\dfrac{1}{x^\alpha} = o\left(\dfrac{1}{x^\beta}\right)$.

(ii) En $+\infty$: $x^\alpha = o(x^\beta)$, $x^\alpha = o(e^x)$ et $(\ln x)^\gamma = o(x^\alpha)$.

Théorème B6.15 (Équivalents usuels)

Soit (u_n) une suite tendant vers 0. Alors

(i) $\sin u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;

(ii) $\tan u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;

(iii) $\operatorname{sh} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;

(iv) $\operatorname{th} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;

(v) $\operatorname{Arctan} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;

(vi) $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;

(vii) $(e^{u_n}-1) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$;

(viii) $((1+u_n)^\alpha - 1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$;

(ix) $1-\cos u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$.

Remarque. Plus généralement, on peut retenir que pour f une fonction dérivable en 0 avec $f'(0)\neq 0$ et (u_n) qui converge vers 0, on a

$$(f(u_n)-f(0)) \underset{n\to+\infty}{\sim} f'(0)u_n.$$

Théorème B6.16 (Équivalents usuels en 0)

On a les équivalents suivants.

(i) $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$;

(ii) $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$;

(iii) $\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{\sim} x$;

(iv) $\operatorname{th} x \underset{x\to 0}{\sim} x$;

(v) $\operatorname{Arctan} x \underset{x\to 0}{\sim} x$.

(vi) $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$;

(vii) $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$;

(viii) $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$;

(ix) $1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$;

Remarque. Plus généralement, si f est dérivable en $a\in D$ avec $f'(a)\neq 0$, alors

$$f(x)-f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a).$$

Dém. B6.16

(i) $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} f'(a)$ donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{f'(a)(x-a)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$.

Méthodes

- Vérifier une relation de comparaison par quotient.
- Déterminer un équivalent
  - ➢ d'un produit, d'un quotient,
  - ➢ d'une somme en gardant une trace du reste,
  - ➢ avec les équivalents usuels.