TD B6. Comparaisons locales

1 Propriétés

Exercice B6.1

Soit f, g, h, k des fonctions définies sur D et $a \in \overline{D}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que

1. si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$,
2. si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $f \underset{a}{\sim} h$, alors $h \underset{a}{=} o(g)$,
3. si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$,
4. si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} O(h)$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$,
5. si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{=} O(h)$.

Exercice B6.2

Soit f, g deux fonctions définies sur I et $u : J \to I$ Soit $a \in \overline{J}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $u(t) \xrightarrow[x \to a]{} b$. Montrer que

1. si $f \underset{b}{=} o(g)$, alors $f \circ u \underset{a}{=} o(g \circ u)$,
2. si $f \underset{b}{=} O(g)$, alors $f \circ u \underset{a}{=} O(g \circ u)$,
3. si $f \underset{b}{\sim} g$, alors $f \circ u \underset{a}{\sim} g \circ u$.

Exercice B6.3

Soit f, g, h, k des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. On suppose

(i) $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$,

(ii) $f \underset{a}{\sim} k$ et $h \underset{a}{\sim} k$.

Montrer que $g \underset{a}{\sim} k$.

Exercice B6.4

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec 0 adhérent à I. On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) - (ax + b) \underset{x \to a}{=} o(x)$. Donner, éventuellement en fonction des valeurs de a et b, un équivalent de f en 0.

2 Calculs

Exercice B6.5

Classez par « ordre de négligeabilité » les suites :

1. $\left(\dfrac{1}{n}\right), \left(\dfrac{\ln n}{n}\right), \left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right), \left(\dfrac{1}{n^2}\right), \left(\dfrac{1}{n \ln n}\right)$.
2. $(n), \left(\sqrt{n} \ln n\right), (n \ln n), \left(n^2\right), \left(\dfrac{n^2}{\ln n}\right)$.

Exercice B6.6

Déterminer un équivalent et la limite quand $n \to +\infty$ des suites suivantes :

(a) $n^2-\ln(n^3+1)$,

(b) $n\ln\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)$,

(c) $\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}-\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}$,

(d) $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ pour $x\in\mathbb{R}$,

(e) $n^{1/n}-1$,

(f) $\ln(n+\sqrt{n^2+1})$,

(g) $\dfrac{\sin(1/n)+1}{\tan(\frac{1}{n^2})}$,

(h) $e^{\sin\sqrt{\frac{\ln n}{n}}}-\cos\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}$,

(i) $\ln\left(\dfrac{n^2-n+5}{n^2+n-3}\right)$,

(j) $\tan\left(\ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right)$.

Exercice B6.7 ✲

Donner des équivalents simples des expressions suivantes.

1. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ en $+\infty$,
2. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}$ en $+\infty$,
3. $x^{1/x}-1$ en $+\infty$,
4. $\cos(\sin(x))$ en 0,
5. $\ln(\cos(28x))$ en 0,
6. $(x+\sin x)^{\frac{1}{3}}$ en 0.

Exercice B6.8 ✲✲

Soit $\alpha>0$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Déterminer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x\ln x}{e^x-1}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{1-\cos(2x)}$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{\sqrt{1+\sin x}-1}$,
4. $\displaystyle\lim_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$,
5. $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$,
6. $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\ln(1+x^2-x)}{x^2(x-1)(x+2)}$,
7. $\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{x^\alpha-\alpha^x}{x^x-\alpha^\alpha}$,
8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{\lambda x}$.

Exercice B6.9 ✲

À quelle condition nécessaire et suffisante sur a,b,c,d a-t-on

$$\frac{1}{t^a(\ln t)^b}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^c(\ln t)^d}\right)?$$

Exercice B6.10 ✲✲

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r\neq0$. Établir les équivalents suivants.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^n k\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n^2}{2}$,
2. $\displaystyle\sum_{i=0}^n u_i\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n^2r}{2}$,
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n)$,
4. $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k^3}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{3}{8n^2}$,

Exercice B6.11 ✲✲✲

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. À l'aide d'équivalents, déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\ln(x+1))^\alpha-(\ln x)^\alpha$.

3 Problèmes d'analyse asymptotique

Exercice B6.12 ✿✿ **(Équivalent des intégrales de Wallis)**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on étudie l'intégrale définie par $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \,\mathrm{d}t$. On admet que (W_n) est décroissante et minorée par 0, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.

1. Montrer que $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$ puis en déduire que $W_{n+1} \sim W_n$ (quand n tend vers $+\infty$).
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n = (n+1) W_n W_{n+1}$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est constante égale à $\dfrac{\pi}{2}$.
   (b) En déduire que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ et préciser $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} W_n$.

Exercice B6.13 ✿✿ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $K_n = \displaystyle\int_0^1 e^t t^n \,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que (K_n) est décroissante et minorée par 0.
2. Pour tout $n > 0$, établir une relation entre K_n et K_{n+1}.
3. Montrer que (K_n) converge vers 0.
4. Montrer que $K_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e}{n}$.

Exercice B6.14 ✿✿

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \ln(n + u_n)$.

1. Montrer que (u_n) possède une limite et la déterminer.
2. Montrer que $\forall n > 2$, $u_n \leqslant \ln(2n)$ *(on pourra utiliser que* $\forall x > 0$, $\ln(x) \leqslant x$.
3. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.
4. Montrer que $u_n - \ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

Exercice B6.15 ✿✿

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $x - \ln x = n$.

1. Montrer que pour tout $n > 0$, cette équation admet une unique solution que l'on notera x_n.
2. Montrer que (x_n) diverge vers $+\infty$.
3. Montrer que $x_n \sim n$.
4. Montrer que $x_n - n \sim \ln n$.

Exercice B6.16 ✿✿

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit x_n le nombre réel solution de $\tan x = x$ sur $]n\pi - \dfrac{\pi}{2}, n\pi + \dfrac{\pi}{2}[$.

1. Montrer que $x_n \sim n\pi$.
2. Soit $y_n = x_n - n\pi$. Montrer que $y_n \sim \pi/2$.
3. Soit $z_n = y_n - \dfrac{\pi}{2}$. Montrer que $z_n \sim -\dfrac{1}{n\pi}$.