DEVOIR MAISON N° 14

**La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.**
**Les résultats devront être encadrés.**
**La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.**
**Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.**

**Problème 1**

## Cas particuliers

1. Les $2-$partitions de $\{1,2,3,4\}$ sont $\{\{1\},\{2,3,4\}\}$, $\{\{2\},\{1,3,4\}\}$, $\{\{4\},\{1,2,3\}\}$, $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$, $\{\{1,4\},\{2,3\}\}$ et on a bien $\boxed{P(4,2)=7}$.
2. Soit $n$ et $p$ $(\geqslant 1)$ tels qu'il existe une $p-$partition de $[\![1,n]\!]$, c'est-à-dire tels que $P(n,p)\neq 0$.
   Alors on a $p$ ensembles non vides, donc chacun de cardinal $\geqslant 1$.
   De plus ils sont deux à deux disjoints. Donc leur réunion a pour cardinal la somme de leurs cardinaux.
   C'est une somme de $p$ valeurs supérieures ou égales à 1, donc un cardinal total supérieur ou égal à $p$.
   Or leur réunion est $[\![1,n]\!]$, de cardinal $n$. Donc $n\geqslant p$.
   Ceci montre par contraposée que $\boxed{\text{si } p>n\geqslant 1, \text{ alors } P(n,p)=0}$.
3. Notons une $p$-partition de $[\![1,n]\!]$ : $[\![1,n]\!]=E_1\cup\ldots\cup E_p$.

   - Si $p=1$, on a $[\![1,n]\!]=E_1$. Donc la seule $1-$partition est $\{[\![1,n]\!]\}$. Donc $\boxed{P(n,1)=1}$.
   - Si $p=n$, d'après le raisonnement de la question précédente, $\mathrm{Card}(E_1\cup\ldots\cup E_n)\geqslant n$ avec égalité si et seulement si tous les $E_i$ ont pour cardinal 1, ce qui est donc le cas ici. Les parties de $[\![1,n]\!]$ de cardinal 1 étant au nombre de $n$, $\{E_1,\ldots,E_n\}=\{\{1\},\ldots,\{n\}\}$, seule $n-$partition possible. Donc $\boxed{P(n,n)=1}$.
4. Notons $E=[\![1,n]\!]$. Si $E=E_1\sqcup E_2$ désigne une $2-$partition, alors $E_1$ et $E_2$ sont non vides et $E_2=E\backslash E_1$. Donc $E_1$ est une partie de $E$ différente de $\emptyset$ et de $E$.
   Réciproquement si $F\subset E$ est différente de $\emptyset$ et de $E$, alors $\{F,E\setminus F\}$ est une $2-$partition de $E$.
   Donc l'ensemble des $2-$partitions est $\{\{F,E\setminus F\},F$ partie non vide et stricte de $E\}$. Il reste à les dénombrer.

   Considérons l'application définie de l'ensemble des parties non vides et strictes de $E$ $(\mathcal{P}(E)\setminus\{\emptyset,E\})$ dans l'ensemble des $2-$partitions $(P_2)$ de $E$ par :

   $$\begin{array}{rcl}\mathcal{P}(E)\setminus\{\emptyset,E\} & \to & P_2\\ F & \mapsto & \{F,E\setminus F\}\end{array}$$

   Toute partition de $P_2$ a exactement deux antécédents distincts par cette application, $F$ et $E\setminus F$. Donc $\mathrm{Card}(P_2)=\dfrac{1}{2}\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)\setminus\{\emptyset,E\})$ d'après le principe des bergers. Les parties de $E$ étant au nombre de $2^n$, on a $\mathrm{Card}(P_2)=\dfrac{1}{2}(2^n-2)$ soit $\boxed{\mathrm{Card}(P_2)=2^{n-1}-1}$.

## Formule récursive

Soit $1 \leqslant p \leqslant n$ et $E$ toujours de cardinal $n$. On fixe un élément $x \in E$. Pour construire une $p$-partition de $E$, on propose deux méthodes distinctes :

— $\boxed{\text{M1}}$ Prendre une $(p-1)$-partition de $E \setminus \{x\}$ et ajouter la partie $\{x\}$.

— $\boxed{\text{M2}}$ Prendre une $p$-partition de $E \setminus \{x\}$ et ajouter $x$ à l'une de ses parties.

5. À une $(p-1)-$partition $A$ de $E \setminus \{x\}$, on associe la $p-$partition $A \cup \{\{x\}\}$ de $E$. Cette correspondance est bijective et montre ainsi que les $p-$partitions de $E$ contenant la partie $\{x\}$ sont au nombre de $\boxed{P(n-1,p-1)}$.
6. On construit une application qui à une $p-$partition $\{E_1, \ldots, E_p\}$ de $E$ ne contenant pas la partie $\{x\}$ associe la $p-$partition de $E \setminus \{x\}$ où chaque ensemble $E_i$ est remplacé par $E'_i = \begin{cases} E_i \setminus \{x\} \text{ si } x \in E_i \\ E_i \text{ sinon.} \end{cases}$.
   Chaque $p-$partition $\{E'_1, \ldots, E'_p\}$ de $E \setminus \{x\}$ admet exactement $p$ antécédents : les $p-$partitions de $E$ $\{E'_1 \cup \{x\}, \ldots, E'_p\}, \ldots, \{E'_1, \ldots, E'_p \cup \{x\}\}$. Ainsi les $p-$partitions de $E$ ne contenant pas la partie $\{x\}$ sont, d'après le principe des bergers, au nombre de $\boxed{pP(n-1,p)}$.
7. L'ensemble des $p-$partitions de $E$ est la réunion des deux ensembles ci-dessus : celles qui contiennent la partie $\{x\}$ et celles qui ne la contiennent pas. Donc $\boxed{P(n,p) = pP(n-1,p) + P(n-1,p-1).}$.
8. $\forall 1 \leqslant n < p$, $P(n,p) = 0$, $P(n-1,p) = 0$ et $P(n-1,p-1) = 0$.
   Donc $\boxed{\text{la formule ci-dessus est encore valide dans ce cas}}$.

## Valeurs remarquables

9. D'après la question 7, pour tout $n \geqslant 1$, $P(n+1,n) = nP(n,n) + P(n,n-1)$. Donc $u_{n+1} = n + u_n$. Par télescopage (ou par une récurrence facile), on a alors pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k$, soit $\boxed{u_n = \frac{(n-1)n}{2} = \binom{n}{2}}$.
10. Pour $n \geqslant 0$, on note $v_n = \frac{1}{3^n} P(n,3)$.
    (a) $\boxed{v_1 = 0}$, $\boxed{v_2 = 0}$, $\boxed{v_3 = \frac{1}{27}}$ et $v_4 = \frac{1}{3^4}\binom{4}{2}$, soit $\boxed{v_4 = \frac{2}{27}}$.
    (b) Pour tout $n \geqslant 1$,
    $$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{3^{n+1}} P(n+1,3) - \frac{1}{3^n} P(n,3) \\ &= \frac{1}{3^{n+1}} (3P(n,3) + P(n,2)) - \frac{1}{3^n} P(n,3) \\ &= \frac{2^{n-1} - 1}{3^{n+1}} \end{aligned}$$
    (c) Donc pour tout $n \geqslant 1$, $v_n = v_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \frac{1}{3^{k+1}}$, ce qui donne après calcul de ces sommes

géométriques et simplification : $v_n = \dfrac{1}{6} - \dfrac{2^{n-1}}{3^n} + \dfrac{1}{2 \times 3^n}$.

Finalement, $\boxed{P(n,3) = \dfrac{1}{2}(3^{n-1}+1) - 2^{n-1}}$ pour $n \geqslant 3$ (même valable dès $n = 1$).

**Problème 2**

Le but de l'exercice est de trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que :

$$P(X^2) = P(X)P(X-1). \tag{1}$$

1. **Analyse** Soit $P = a$ un polynôme constant vérifiant (1). Alors $a = a \times a$. Donc $a = 0$ ou $a = 1$.

   **Synthèse** Les polynômes constants égaux à 0 et 1 respectivement vérifient l'équation car $0 = 0 \times 0$ et $1 = 1 \times 1$.

   Conclusion : Les solutions constantes de (1) sont $\boxed{0 \text{ et } 1}$.

2. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. $X^2 + X + 1 = (X-j)(X-j^2)$. Donc par composition avec $X^2$ : $X^4 + X^2 + 1 = (X^2 - j)(X^2 - j^2)$. On remarque que $(e^{i\pi/3})^2 = j$.

   D'où : $\boxed{X^4 + X^2 + 1 = (X - e^{i\pi/3})(X + e^{i\pi/3})(X-j)(X+j) \text{ sur } \mathbb{C}}$.

   Pour la décomposition sur $\mathbb{R}$, on remarque que $e^{i\pi/3} = \overline{(-j)}$.

   D'où : $(X - e^{i\pi/3})(X+j) = X^2 - 2\cos(\dfrac{\pi}{3}) + 1 = X^2 - X + 1$ et de même $(X + e^{i\pi/3})(X-j) = X^2 + X + 1$.

   D'où $\boxed{X^4 + X^2 + 1 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1) \text{ sur } \mathbb{C}}$.

3. En posant $A(X) = X^2 + X + 1$, on a $A(X-1) = (X-1)^2 + (X-1) + 1 = X^2 - X + 1$. Donc la factorisation ci-dessus donne : $A(X^2) = A(X)A(X-1)$. Donc $\boxed{A \text{ vérifie l'équation (1)}}$.

Dans la suite du problème, on suppose le polynôme $P$ est non constant et vérifie l'équation (1).

4. Supposons que $\alpha$ est une racine de $P$, c'est-à-dire que $P(\alpha) = 0$.

   Alors $P(\alpha^2) = P(\alpha)P(\alpha - 1) = 0$, donc $\boxed{\alpha^2 \text{ est racine de } P}$.

   Et $P((\alpha+1)^2) = P(\alpha+1)P(\alpha) = 0$, donc $\boxed{(\alpha+1)^2 \text{ est racine de } P}$.

5. On suppose que 0 est une racine du polynôme $P$ et on définit la suite $(u_n)$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = (u_n + 1)^2$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (u_n+1)^2 - u_n = u_n^2 + u_n + 1$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + x + 1 > 0$ (trinôme convexe de discriminant strictement négatif).

   En particulier, comme $u_n \in \mathbb{R}$, $u_n^2 + u_n + 1 > 0$. Donc $\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante}}$.

   (b) Si la suite $(u_n)$ convergeait vers $\ell \in \mathbb{R}$, on aurait $u_{n+1} \to \ell$ et $(u_n+1)^2 \to (\ell+1)^2$ (par continuité de $x \mapsto (x+1)^2$).

   Comme $u_{n+1} = (u_n+1)^2$ pour tout $n$, on aurait, par unicité de la limite, $\ell = (\ell+1)^2$, soit $\ell^2 + \ell + 1 = 0$, ce qui est impossible (on a déjà dit que $x^2 + x + 1$ ne s'annulait pour aucun $x \in \mathbb{R}$).

   On a donc montré par l'absurde que $\boxed{(u_n) \text{ n'est pas convergente}}$.

   Or $(u_n)$ est croissante. Donc $\boxed{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty}$.

   (c) **Init.** $P(u_0) = P(0) = 0$ car on a supposé 0 racine de $P$.

   **Héréd.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(u_n) = 0$.
   Alors $P(u_{n+1}) = P((u_n+1)^2) = P(u_n+1)P(u_n) = 0$.

   On a donc montré par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P(u_n) = 0}$.

(d) $(u_n)$ est strictement croissante, donc tous ses termes sont distincts. De plus, ils sont tous racines de $P$. $P$ a donc une infinité de racines, ce qui est impossible car ce n'est pas le polynôme nul (il est non constant).

L'ensemble de cette question 5 montre donc par l'absurde que $\boxed{0 \text{ n'est pas racine de } P}$.

6. Soit $\alpha$ une racine de $P$.

(a) $\boxed{\text{Init.}}$ $P(\alpha^{2^0}) = P(\alpha) = 0$ car on a supposé $\alpha$ racine de $P$.

$\boxed{\text{Héréd.}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(\alpha^{2^n}) = 0$.

Alors $P(\alpha^{2^{n+1}}) = P((\alpha^{2^n})^2) = P(\alpha^{2^n})P(\alpha^{2^n} - 1) = 0$. Donc $\alpha^{2^{n+1}}$ est racine de $P$.

On a donc montré par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha^{2^n} \text{ est racine de } P}$.

(b) $P$ n'étant pas le polynôme nul, ses racines sont en nombre fini. Donc l'ensemble des valeurs $\alpha^{2^n}$ (un nombre infini de valeurs) est en fait de cardinal fini. Il existe en particulier deux entiers distincts (ordonnés tels que $n_1 > n_2$) tels que $\alpha^{2^{n_1}} = \alpha^{2^{n_2}}$, soit $\alpha^{2^{n_1} - 2^{n_2}} = 1$.

Comme $2^{n_1} - 2^{n_2} \in \mathbb{N}^*$ , $\boxed{\text{il existe bien } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } \alpha^k = 1}$.

(c) $\alpha$ est une racine de l'unité. En particulier, $\boxed{|\alpha| = 1}$.

On a montré que toute racine de $P$ est de module 1. Or si $\alpha$ est racine de $P$, on a aussi $(\alpha+1)^2$ racine de $P$ (d'après la question 4). Donc $|(\alpha+1)^2| = 1$ et donc $\boxed{|\alpha + 1| = 1}$.

(d)
- Si $\alpha$ est une racine de $P$ et $M$ le point du plan complexe d'affixe $\alpha$. Alors $|\alpha| = 1$ donc $M$ appartient au cercle unité. De plus $|\alpha| = |\alpha + 1|$. Donc en notant $O$ le centre du repère et $A$ le point d'affixe $-1$, $M$ est sur la médiatrice de $[OA]$, c'est-à-dire la droite correspondant à $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}$. L'intersection de cette droite avec le cercle unité donne deux points d'affixes $j$ et $j^2$, seules racines possibles de $P$.
- $P$ est non constant donc admet une racine $\alpha = j$ ou $j^2$. Mais alors $\alpha^2$, qui vaut respectivement $j^2$ ou $j (= j^4)$ est aussi racine. Conclusion : $\boxed{\text{les racines de } P \text{ sont } j \text{ et } j^2}$.

$\boxed{\text{Analyse}}$ Soit $P$ un polynôme non nul vérifiant (1). S'il est constant, il est égal à 1.

Sinon, notons $\lambda \in \mathbb{C}^*$ le coefficient dominant de $P$. La relation (1) nous apprend que $\lambda = \lambda^2$, c'est-à-dire $\lambda = 1$. Le polynôme $P$ est donc unitaire.

De plus, il admet pour seules racines $j$ et $j^2$. Reste à déterminer leurs multiplicités.

Soit $\alpha$ ( $= j$ ou $j^2$ ) tel que $\alpha$ soit de multiplicité $n$ et $\alpha^2$ de multiplicité $m \leqslant n$.

Alors $P(X) = [(X-j)(X-j^2)]^m (X-\alpha)^{n-m}$. On posera $r = n - m$. Ainsi :

$P(X) = (X^2 + X + 1)^m (X - \alpha)^r$, et

$P(X-1) = ((X-1)^2 + (X-1) + 1)^m (X - 1 - \alpha)^r = (X^2 - X + 1)^m (X - 1 - \alpha)^r$, ainsi que

$P(X^2) = (X^4 + X^2 + 1)^m (X^2 - \alpha)^r$.

On a alors le produit $P(X)P(X-1) = (X^2+X+1)^m (X-\alpha)^r (X^2 - X + 1)^m (X - 1 - \alpha)^r$.

On a ainsi deux écritures pour $P(X^2)$ : $P(X^2) = (X^4 + X^2 + 1)^m (X-\alpha)^r (X-1-\alpha)^r = (X^4 + X^2 + 1)^m (X^2 - \alpha)^r$. L'unicité de la division euclidienne de $P(X^2)$ par $(X^4 + X^2 + 1)^m$ nous dit que $(X-\alpha)^r (X - 1 - \alpha)^r = (X^2 - \alpha)^r$. Or si $r \neq 0$, la première des factorisations donne pour racines $\alpha$ et $1 + \alpha$ alors que la deuxième nous donne les racines carrées de $\alpha$, à savoir $\alpha^2$ et $1 + \alpha$. C'est impossible, donc $r = 0$.

Finalement $j$ et $j^2$ sont racines de $P$ avec la même multiplicité.

$\boxed{\text{Synthèse}}$ Le polynôme constant égal à 1 vérifient l'équation (déjà vu) et s'exprime $(X^2 + X + 1)^0$.

Avec les notations de la question 3, le polynôme $A(X) = X^2 + X + 1$ vérifie l'équation. Mais la relation $A(X^2) = A(X)A(X-1)$ nous donne aussi $(A(X^2))^m = (A(X))^m (A(X-1))^m$. Donc le polynôme $A^m$ vérifie également l'équation.

Conclusion : l'ensemble des solutions non nulles de l'équation (1) est :

$$\boxed{\text{l'ensemble des polynômes } (X^2 + X + 1)^m \text{ où } m \in \mathbb{N}}.$$