DEVOIR MAISON N° 15

**La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.**
**Les résultats devront être $\boxed{\text{encadrés}}$.**
**La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.**
**Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.**

**Problème 1**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une rapide étude de fonction, montrer que l'équation $\ln x + nx = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$. On note $x_n$ cette solution.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. En déduire que $(x_n)$ converge et déterminer sa limite

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = nx_n$.

4. Montrer que $y_n + \ln y_n = \ln n$.
5. Montrer que $(y_n)$ diverge vers $+\infty$.
6. Montrer que $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ *(on pourra par exemple commencer par établir que $\ln y_n = o(y_n)$ à l'aide d'un taux d'accroissement... ou opter pour toute autre méthode, éventuellement plus simple à laquelle je n'aurais pas pensé).*
7. En déduire un équivalent de $x_n$ en $+\infty$.
8. (a) Étant données deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ qui tendent vers $+\infty$, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ implique $\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln v_n$.
   (b) En déduire un équivalent de $x_n - \dfrac{\ln n}{n}$.
9. Trouver finalement un équivalent de $x_n - \dfrac{\ln n}{n} - \dfrac{\ln(\ln n)}{n}$ *(on pourra par exemple passer par l'étude de $z_n = y_n - \ln n - \ln(\ln n)$ et utiliser la relation de la question (4)).*

**Problème 2**

# Wallis, le retour

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$ et on rappelle les résultats du DM n° 8 :

- $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$ et $I_2 = \dfrac{\pi}{4}$.
- $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < I_{n+1} \leqslant I_n$.
- $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.
- La suite $((n+1)I_nI_{n+1})$ est constante égale à $\dfrac{\pi}{2}$.
- $\forall k \in \mathbb{N},\ I_{2k} = \dfrac{(2k)!}{2^{2k}k!^2}\dfrac{\pi}{2}$ et $I_{2k+1} = \dfrac{2^{2k}k!^2}{(2k+1)!}$.

1. Montrer que $I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n$.
2. En déduire un équivalent simple de $I_n$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{(2k+1)I_{2k+1}}{2kI_{2k}}$ et en déduire que $\pi = \displaystyle\lim_{k\to+\infty} \frac{2^{4k}(k!)^4}{k((2k)!)^2}$.

## Un encadrement

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f'$ soit strictement décroissante. Soit $g$ la fonction définie sur $[a, b]$ par $g : t \mapsto \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) + f(a)$.

4. Soit $d = f - g$. Montrer qu'il existe $c \in ]a, b[$ tel que $d$ soit croissante sur $[a, c]$ et décroissante sur $[c, b]$. *On pourra dériver $d$ et penser aux accroissements finis.*
5. Démontrer que $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
6. Calculer $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
7. Justifier l'existence du nombre $M_2 = \max\limits_{t \in [a,b]} |f''(t)|$.
8. Le but de cette question est de montrer que
$$\forall t \in [a, b], \quad f(t) - g(t) \leqslant M_2 \frac{(t - a)(b - t)}{2}. \tag{❀}$$
   (a) Vérifier l'inégalité (❀) pour $t = a$ et $t = b$.
   (b) Soit $t \in ]a, b[$. On pose $h$ définie sur $[a, b]$ par $h(x) = f(x) - g(x) - K(x - a)(b - x)$ où $K$ est une constante telle que $h(t) = 0$. Montrer que $h$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et donner l'expression de $h''$.
   (c) Montrer qu'il existe $c \in ]a, b[$ tel que $h''(c) = 0$.
   (d) En déduire que $|K| \leqslant \dfrac{M_2}{2}$ puis démontrer l'inégalité (❀) souhaitée.
9. Montrer, à partir de l'inégalité (❀) précédente, que
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M_2 \frac{(b - a)^3}{12}.$$
10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ définie sur $[n, n + 1]$ vérifie bien les hypothèses de cette partie et en déduire l'encadrement
$$0 \leqslant \left(n + \frac{1}{2}\right)(\ln(n + 1) - \ln(n)) - 1 \leqslant \frac{1}{12n^2}.$$

## Formule de Stirling

Étant donné $n > 1$ un nombre entier, on pose
$$u_n = \ln\left(n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\right) - \ln(n!) \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{12(n - 1)}.$$

11. Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes. On note $\ell$ leur limite commune.
12. En calculant de deux manières différentes $\lim\limits_{n \to +\infty} 2u_n - u_{2n}$, démontrer que $\ell = -\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$.
13. En déduire la formule de Stirling :
$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$