

# Programme de colle 20 : du 10/03 au 14/03

## Polynômes

- Définition, opérations (dont la formule du produit de Cauchy), structure d'anneau intègre, éléments inversibles.
- Degré et coefficient dominant d'un polynôme, d'un produit, d'une somme, d'une composée.
- Fonction polynomiale, évaluation (morphisme d'évaluation).
- Polynômes dérivés, degré, formule de Leibniz, formule de Taylor.
- Arithmétique des polynômes (divisibilité, division euclidienne, PGCD, PPCM, Bézout, Gauß).
- Racines : caractérisations par l'évaluation et la divisibilité.
- Méthode de Horner pour évaluer en  $\alpha$  ou diviser par  $(X - \alpha)$ .
- Racines multiples : ordre de multiplicité, propriétés, caractérisations par l'évaluation des dérivées successives et la divisibilité.
- Factorisation d'un polynôme de degré  $n$  dont on connaît des racines/toutes les racines.
- Formules de Viète.
- Polynômes scindés, polynômes irréductibles, irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$ , de  $\mathbb{C}[X]$ , factorisation en produit d'irréductibles.

**Exercices abordés dans le TD C4 :** 1, 4, 8, 9, 10, 14, 17, 21, 23, 26.

## Questions de cours

- Énoncé et démonstration de la formule de Taylor.
- Énoncé du théorème de division euclidienne des polynômes et démonstration de l'unicité.
- Expression du reste de la division euclidienne d'un polynôme  $P$  par  $(X - a)(X - b)$ , par  $(X - a)^2$
- Définition de l'ordre de multiplicité  $\nu_\alpha(P)$  d'une racine  $\alpha$  de  $P$  et caractérisation de  $\nu_\alpha(P) \geq k$ .
- Factorisation de  $1 + X + X^2 + X^3 + X^4$  en produit d'irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$  et  $\mathbb{R}[X]$ .

## Remarques

- Le programme nous invite à énoncer les résultats d'arithmétique sans redémontrer ni nous étendre sur ceux qui sont analogues au cas de  $\mathbb{Z}$ .
- Les techniques de factorisation systématique d'un polynôme n'ont pas encore été entraînées, on ne factorise que par des  $(X - \alpha)$  pour l'instant.
- Les relations entre coefficients et racines ont été énoncées dans le cas général, mais entraînées dans le cas d'un degré 2 ou 3 principalement.
- En plus du savoir-faire, il est important de savoir énoncer les définitions des notions ou les théorèmes employés.

## Recommandations générales

La colle commencera par une question de cours. On vérifiera également au fil des exercices que le cours est maîtrisé. Si c'est le cas, la note finale est à deux chiffres. Sinon, impossible de dépasser 10.