DEVOIR SURVEILLÉ N° 6

Les résultats devront être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.
Si le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il l'indique sur sa copie et poursuit en expliquant les initiatives qu'il a été amené à prendre.

Problème 1

On note $f : x \mapsto e^{x^2/2}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Exprimer $f'(x)$, $f''(x)$ et $f'''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x)$, et établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$P_{n+1} = P_n' + XP_n.$$
4. Calculer le degré de P_n et son coefficient dominant. Discuter la parité de la fonction polynomiale P_n associée.
5. À l'aide de la formule de récurrence, calculer P_4, P_5 et P_6.
6. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients polynomiaux *(on ne cherchera pas à résoudre cette équation.)*
7. Après avoir énoncé la formule de Leibniz (avec ses hypothèses), établir une relation entre P_{n+2}, P_{n+1} et P_n.
8. En déduire une expression de P'_{n+1} en fonction de P_n.
9. Montrer que P_n est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients polynomiaux.
10. Un résultat général : soit $d \in \mathbb{N}$. On dit qu'un polynôme $A = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ est **pair** lorsque $A(-X) = A(X)$ et **impair** lorsque $A(-X) = -A(X)$.
Montrer que A est pair si et seulement si $\forall i \in \mathbb{N}$, $a_{2i+1} = 0$ et impair si et seulement si $\forall i \in \mathbb{N}$, $a_{2i} = 0$.
11. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que P_n peut s'écrire sous la forme
   $$P_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_k X^{n-2k},$$
   où les a_k sont des nombres réels. En particulier a_0 est le coefficient dominant de P_n.
   (b) À l'aide de l'équation différentielle trouvée dans la question précédente, déterminer pour tout $k \geqslant 1$ une relation entre a_k et a_{k-1}. En déduire une expression de a_k en fonction de n et k.

Problème 2

A Puissances de matrice

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Le but de cette partie est le calcul de M^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de différentes manières. Les quatre questions de cette partie sont donc indépendantes.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Exprimer A^2 en fonction de A et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En remarquant que $M = A + 2I_3$, exprimer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. (a) Calculer M^2 et déterminer a et b réels tels que
$$M^2 = aM + bI_3.$$
   (b) Déterminer le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - aX - b$.
   (c) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression de M^n en fonction de n et comparer avec la question 1b.
3. Soit $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer une matrice diagonale D telle que $MP = PD$.
   (b) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (c) Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donner l'expression de M^n en fonction de D^n, P et P^{-1}.
4. Une petite dernière.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels α_n et β_n tels que
$$M^n = \begin{pmatrix} \beta_n - 2\alpha_n & 0 & -2\alpha_n \\ \alpha_n & \beta_n & \alpha_n \\ \alpha_n & 0 & \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}.$$
   On donnera la valeur de α_0, β_0 et on établira des relations entre $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ et α_n, β_n.
   (b) Montrer que (β_n) est géométrique et que (α_n) vérifie une relation de récurrence linéaire à deux termes.
   (c) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de α_n et β_n en fonction de n et comparer avec la question 1b.

B Une application

Considérons trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par $u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 2w_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + 4w_n \end{cases}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Montrer que la définition des trois suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) s'écrit via la relation matricielle $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$. Exprimer alors X_n en fonction de X_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. La matrice M est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse.
7. On observe $u_1 = 6$, $v_1 = 9$, $w_1 = 12$. Déterminer u_0, v_0, w_0.

Problème 3

Le club de lecture de Bouquigny-sur-Page organise des soirées d'échanges : tous les membres (n personnes avec $n \geqslant 2$) viennent avec un livre, on les met en commun (ils sont tous différents) et on les redistribue (un par personne), si bien que tout le monde repart avec un des livres amenés. Le but de ce problème est d'étudier le nombre de distributions possibles, et en particulier dans le cas où tout le monde repart avec un livre différent de celui qu'il a amené.

On n'hésitera pas à admettre la relation de récurrence établie à la question 3 afin de poursuivre le problème si on n'a pas réussi à la démontrer entièrement.

Une relation de récurrence

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, on note d_n le nombre de manières de distribuer les livres pour que tout le monde ait un livre différent de celui qu'il a amené.

1. Déterminer d_2 et d_3.
2. Supposons $n \geqslant 4$; on examine un scenario favorable, c'est-à-dire où tous les participants repartiront avec un livre différent de celui qu'ils ont amené. Parmi les membres du groupe, on appelle c le président de l'association. Soit a la personne qui repartira avec le livre amené par c. Soit b la personne qui repartira avec le livre amené par a. Vos réponses aux questions suivantes devront dépendre de n, d_{n-1} et d_{n-2}.
   (a) Combien y a-t-il de manières de choisir a ?
   (b) Si $b = c$, combien y a-t-il de manières de distribuer les n livres ?
   (c) Si $b \neq c$, combien y a-t-il de manières de distribuer les n livres ? *(indication : on pourra comparer avec une distribution où a ne participe pas et b récupère directement le livre amené par c)*
3. En déduire que pour tout $n \geqslant 4$, $d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$.
4. En déduire d_4 et d_5.

Détermination d'une formule explicite

Le but de cette partie est d'obtenir d_n en fonction de n. On note u_n le nombre de manières de distribuer les livres sans contrainte (*i.e.* on peut repartir avec son propre livre).

5. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
6. Soit $2 \leqslant k \leqslant n$.
   (a) Combien y a-t-il de manières de distribuer les livres en faisant en sorte qu'exactement k participants repartent avec un livre différent de celui qu'ils ont amené ?
   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} d_k$.

7. Soit $n \geqslant 2$. Le but de cette question est (à l'inverse de la formule précédente) d'exprimer d_n en fonction des u_k.

   (a) Soit $j, k \in [\![2, n]\!]$. Montrer que $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k}$.

   (b) En déduire que $\forall j \in [\![2, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{j}(-1)^{n-k} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = n \\ 0 \text{ si } j < n \end{cases}$.

   (c) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(\sum_{j=2}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{j}(-1)^{n-k} d_j \right) = d_n$.

   (d) Établir finalement que $d_n = n(-1)^{n-1} + (-1)^n + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k} u_k$.

8. À l'aide de la question 5, démontrer que pour tout $n \geqslant 2$, $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Un avant-goût des probabilités

Parmi toutes les distributions possibles des livres, au nombre de u_n, celles où personne ne repart avec son propre livre sont au nombre de d_n. On s'intéresse à la proportion que cela représente et on appelle $p_n = \dfrac{d_n}{u_n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. En particulier, le but de cette partie est l'étude du comportement de la suite $(p_n)_{n \geqslant 2}$.

9. Montrer que les suites $(p_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(p_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

10. Montrer que (p_n) converge vers une limite notée ℓ et que $\ell \in \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right]$.

11. On rappelle le théorème de Taylor-Lagrange, démontré au précédent DS.

    Theorème 1

    Soit $n \in \mathbb{N}$, f de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a, b]$ et dérivable $n + 1$ fois sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que

    $$f(b) = \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \Big) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

    En l'appliquant à la fonction exp, déterminer la valeur de ℓ. *(il y a 1 point sur 6 à gagner si vous la devinez sans la démontrer)*