**Problème 1**

On note $f : x \mapsto e^{x^2/2}$, qui est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. Or exp est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donc par composition, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = xe^{x^2/2},\ f''(x) = (x^2+1)e^{x^2/2} \text{ et } f'''(x) = (x^3+3x)e^{x^2/2}}$.
3. On va montrer cela par récurrence

**Initialisation** $f^{(0)}(x) = f(x) = P_0(x)e^{x^2/2}$ avec $P_0 = 1$.

**Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $f^{(n)}(x)$ s'écrit $P_n(x)e^{x^2/2}$ avec $P_n \in \mathbb{R}[X]$.
Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n+1)}(x) = (P_n'(x) + xP_n(x))e^{x^2/2}$, qui s'écrit bien $P_{n+1}(x)e^{x^2/2}$ avec $P_{n+1} = P_n' + XP_n$.

4. Montrons par récurrence que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \deg(P_n) = n \text{ et son coefficient dominant vaut } 1}$.

**Initialisation** $P_0 = 1$, de degré 0.

**Hérédité** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P_n$ est de degré $n$ et a pour coefficient dominant 1.
Alors $P_n = X^n + Q$ avec $\deg Q \leqslant n-1$ et $P_n' = nX^{n-1} + Q'$ avec $\deg Q \leqslant n-2$ .
Donc $P_{n+1} = X^{n+1} + \underbrace{nX^{n-1} + Q' + XQ}_{\deg \leqslant n}$. CQFD.

On remarque aussi que $f^{(n)}$ est paire si $n$ est pair et impaire si $n$ est impair (à nouveau par récurrence en utilisant que la dérivée change la parité). Donc comme $f$ est paire,
$\boxed{P_n \text{ est pair si } n \text{ est pair et impair si } n \text{ est impair}}$.

5. $P_4 = P_3' + XP_3 = \boxed{X^4 + 6X^2 + 3}$.
De même $\boxed{P_5 = X^5 + 10X^3 + 15X}$ et $\boxed{P_6 = X^6 + 15X^4 + 45X^2 + 15}$.
6. $f$ est solution de $y' = xy$.
7. Notons $h(x) = x$. Alors la formule de Leibniz appliquée à l'ordre $n$ sur ce qui précède donne
$$f^{(n+2)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} h^(k)(x) f^{(n+1-k)}(x) = xf^{(n+1)}(x) + (n+1)f^{(n)}(x).$$
On en déduit $\boxed{P_{n+2} = XP_{n+1} + (n+1)P_n}$.
8. D'où $P_{n+1}' + XP_{n+1} = XP_{n+1} + (n+1)P_n$ pour tout $n$.
Donc $\boxed{P_{n+1}' = (n+1)P_n}$.
9. Comme $P_{n+1}' = P_n'' + XP_n' + P_n$ (en dérivant la relation de départ), $P_n$ vérifie $\boxed{P_n'' + XP_n' - nP_n = 0}$, qui est bien une EDL d'ordre 2 à coefficients polynomiaux.
10. $A(-X) = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant d \\ k \text{ pair}}} a_k X^k - \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant d \\ k \text{ impair}}} a_k X^k$ donc $A(X) - A(-X) = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant d \\ k \text{ impair}}} 2a_k X^k$.
Ainsi $A(X) - A(-X) = 0 \Leftrightarrow \forall 0 \leqslant k \leqslant n$, si $k$ est impair, alors $a_k = 0$.
Donc $\boxed{A \text{ est pair si et seulement si } \forall i \in \mathbb{N},\ a_{2i+1} = 0}$.
Un raisonnement analogue avec $A(X) + A(-X)$ donne la caractérisation d'un polynôme impair.

11. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $P_n$ est de degré $n$ et sa parité est celle de $n$. Ainsi les monômes non nuls de $P$ sont ceux de degrés $n$, $n-2$, $\ldots$; autrement dit de degrés $n-2k$, pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $n-2k \geqslant 0$, *i.e.* $0 \leqslant k \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Il reste à nommer $a_k$ le coefficient de degré $n-2k$ pour écrire $P_n$ sous la forme

$$\boxed{P_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_k X^{n-2k}}.$$

En particulier $a_0 = 1$ est le coefficient dominant de $P_n$.

(b) En dérivant l'expression ci-dessus, on a $XP_n' = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (n-2k) a_k X^{n-2k}$ (il faudrait arrêter la somme à $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ mais cela revient au même pour $n$ impair et lorsque $n$ est pair, le terme pour $k = n/2$ est nul car alors $n-2k = 0$).

Puis $P_n'' = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor - 1} (n-2k)(n-2k-1) a_k X^{n-2k-2} = \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (n-2k+2)(n-2k+1) a_{k-1} X^{n-2k}$.

On exploite alors la relation $P_n'' + XP_n' - nP_n = 0$ de la question 9 en explicitant que les coefficients de ce polynôme sont nuls. D'après le calcul de dérivées ci-dessus, cela donne $\forall 1 \leqslant k \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$,

$$\boxed{(n-2k+2)(n-2k+1)a_{k-1} - 2k a_k = 0}.$$

Après un habituel produit télescopique (et comme $a_0 = 1$), on a

$$\boxed{a_k = \frac{n!}{2^k k! (n-2k)!}}.$$

**Problème 2**

# A Puissances de matrice

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Le but de cette partie est le calcul de $M^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de différentes manières. Les quatre questions de cette partie sont donc indépendantes.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   (a) On remarque que $A^2 = A$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{A^n = \begin{cases} A \text{ si } n > 0 \\ I_3 \text{ si } n = 0 \end{cases}}$.

   (b) On remarque que $M = A + 2I_3$. De plus $AI_3 = I_3 A = A$ donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. $M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I_3)^k A^{n-k} = 2^n I_3 + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k A$ d'après les valeurs de $A^{n-k}$.

   Or $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k - 2^n = 3^n - 2^n$.

   Finalement, $\boxed{M^n = (3^n - 2^n)A + 2^n I_3}$.

2. (a) On trouve
$$\boxed{M^2 = 5M - 6I_3}. \tag{E1}$$
   (b) Soit $R$ le reste dans la division euclidienne de $X^n$ par $X^2 - 5X + 6$. On a $R \in \mathbb{R}_0[X]$, donc on pose $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $R = \alpha X + \beta$.
   Par ailleurs, $X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$. Les évaluations de la division euclidienne en 2 et 3 donnent le système
$$\begin{cases} 2^n = 2\alpha + \beta \\ 3^n = 3\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3^n - 2^n \\ \beta = 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{cases}.$$
   Donc $\boxed{R = (3^n - 2^n)X + 3 \times 2^n - 2 \times 3^n}$.
   (c) Ainsi $M^n = \alpha M + \beta I_3 = \alpha(A + 2I_3) + \beta I_3 = \boxed{(3^n - 2^n)A + 2^n I_3}$.

3. Soit $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) $MP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$.
   (b) L'algorithme de Gauß-Jordan donne $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$.
   (c) On montre par une récurrence élémentaire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}, M^n = PD^nP^{-1}$.

4. Une petite dernière.
   (a) On procède à nouveau par récurrence.
   La formule est correcte pour $M^0$ avec $\boxed{\alpha_0 = 0 \text{ et } \beta_0 = 1}$.
   Pour l'hérédité, soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $\alpha_n$ et $\beta_n$ tels que
$$M^n = \begin{pmatrix} \beta_n - 2\alpha_n & 0 & -2\alpha_n \\ \alpha_n & \beta_n & \alpha_n \\ \alpha_n & 0 & \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}.$$
   Alors $M^{n+1} = M^nM = \begin{pmatrix} \beta_n - 4\alpha_n & 0 & -2\beta_n - 8\alpha_n \\ 2\alpha_n + \beta_n & 3\beta_n & 2\alpha_n + \beta_n \\ 2\alpha_n + \beta_n & 0 & 2\alpha_n + 4\beta_n \end{pmatrix}$.
   On a bien la forme souhaitée avec $\boxed{\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + \beta_n \text{ et } \beta_{n+1} = 3\beta_n}$.
   (b) $\boxed{(\beta_n) \text{ est géométrique de raison } 3}$.
   Puis (par la technique habituelle), $(\alpha_n)$ vérifie : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+2} = 5\alpha_{n+1} - 6\alpha_n}$.
   (c) Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\beta_n = 3^n}$. Pour $(\alpha_n)$, on résout l'équation caractéristique (voir pour $(x_n)$ précédemment) et on utilise $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_1 = 1$, ce qui donne $\boxed{\alpha_n = 3^n - 2^n}$, d'où la même expression de $M^n$ que dans 1b.

# B Une application

Considérons trois suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ définies par $u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - 2w_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + 4w_n \end{cases}$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. On vérifie (en effectuant le produit) que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = MX_n}$.

   Il est alors aisé de montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{X_n = M^n X_0}$.
6. On peut faire un calcul direct, ou plutôt utiliser $(E1)$, pour obtenir que $M$ est inversible et $M^{-1} = -\frac{1}{6}(M - 5I) = \boxed{\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ -1/6 & 1/3 & -1/6 \\ -1/6 & 0 & -1/6 \end{pmatrix}}$.
7. Comme $X_1 = MX_0$, on a aussi $X_0 = M^{-1}X_1$ car $M$ est inversible. Ici $X_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$ donne $X_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   soit $\boxed{u_0 = 8,\ v_0 = 0 \text{ et } w_0 = 1}$.

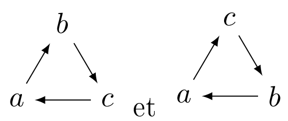
**Problème 3**

## Une relation de récurrence

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2, on note $d_n$ le nombre de manières de distribuer les livres pour que tout le monde ait un livre différent de celui qu'il a amené.

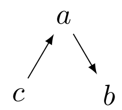
1. • Soit $\{a, b\}$ ces deux personnes. Le livre de $a$ va à $b$ (car pas à lui-même) et celui de $b$ va à $a$ (car pas à lui-même). On notera par la suite $a \to b$ et $b \to a$.
   C'est la seule distribution possible. Il y en a donc $\boxed{1}$.
   • Soit $\{a, b, c\}$ ces trois personnes. Le livre de $a$ va à $b$ ou $c$ (car pas à lui-même). On appelle $x$ celui qui repart avec et $y$ le troisième larron ($x = b$ et $y = c$ ou l'inverse).
   Le livre de $a$ va à $x$. Le livre de $x$ va à $a$ ou $y$. S'il va à $a$, $y$ repart avec son livre, ce qui n'est pas possible. Donc le livre de $x$ va à $y$ et nécessairement, celui de $y$ va à $a$.

   Cela donne $\boxed{\text{deux distributions possibles}}$ (suivant les valeurs de $x$ et $y$) : 



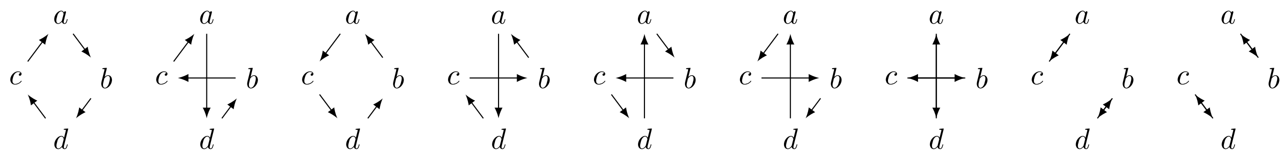
2. Soit $n \geqslant 4$. Parmi les membres du groupe, on appelle $c$ le président de l'association. Soit $a$ la personne qui repartira avec le livre amené par $c$. Soit $b$ la personne qui repartira avec le livre amené par $a$.
   (a) Soit $E$ l'ensemble des participants (ainsi $|E| = n$). Le livre de $c$ peut aller à n'importe quelle personne de $E \setminus \{c\}$, ensemble de cardinal $n - 1$. Cela donne $\boxed{n - 1 \text{ possibilités}}$.
   (b) Si $b = c$, Alors on a $c \leftrightarrow a$ : $a$ et $c$ s'échangent leurs livres. Le reste de la distribution consiste en une distribution convenable pour les membres de $E \setminus \{a, c\}$. Cela donne par définition $\boxed{d_{n-2} \text{ possibilités}}$.
   (c) Si $b \neq c$, considérons les deux ensembles suivants :
      • l'ensemble $D_1$ des distributions de livres pour les gens de $E$ avec $c \to a \to b$ ,

- l'ensemble $D_2$ des distributions de livres pour les gens de $E \setminus \{a\}$ avec $c \to b$. Comme $b$ peut être un élément quelconque de $E \setminus \{c, a\}$, l'ensemble $D_2$ représente exactement les distributions de livres avec pour participants $E \setminus \{a\}$ et où personne ne repart avec son propre livre. Donc $|D_2| = d_{n-1}$.

Or toute distribution de $D_1$ correspond à une unique distribution de $D_2$ (en enlevant $a$ de l'ensemble des participants) et réciproquement (en remplaçant $c \to b$ par  ).

$D_1$ et $D_2$ sont donc en bijection et $\boxed{|D_1| = d_{n-1}}$.

3. Ces deux cas ($b = c$ et $b \neq c$) forment une partition de l'ensemble des distributions possibles avec $c \to a$ et donnent $d_{n-2} + d_{n-1}$ possibilités.
   Pour chaque choix de $a$, on a ce même nombre de distributions possibles.
   Finalement $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 4,\ d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})}$
   (si on veut : $d_n = \displaystyle\sum_{a \in E \setminus \{c\}} (d_{n-1} + d_{n-2}) = |E \setminus \{c\}|(d_{n-1} + d_{n-2})$).
4. On a donc $d_4 = 3(d_2 + d_3) = \boxed{9}$ et $d_5 = 4(d_3 + d_4) = \boxed{44}$.
   **Remarque.** On peut encore vérifier $d_4$ à la main :



## Détermination d'une formule explicite

Le but de cette partie est d'obtenir $d_n$ en fonction de $n$. On note $u_n$ le nombre de manières de distribuer les livres en autorisant qu'un participant reparte avec son propre livre.

5. Décrire une telle distribution revient à donner une fonction de $E$ dans $E$ qui associe à tout participant la personne qui repart avec son livre. Chacun repartant avec un et un seul livre, cette fonction sera alors bijective et sera donc une permutation des $n$ éléments de $E$. Donc $\boxed{u_n = n!}$.
6. Soit $2 \leqslant k \leqslant n$.
   (a) On cherche le nombre de manières de distribuer les livres avec $k$ personnes exactement qui n'ont pas leur propre livre. Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir ces $k$ personnes (comme partie de $E$ à $k$ éléments).
   Pour chacun de ces choix, les $n-k$ autres personnes repartent avec leur propre livre. Pour les $k$ personnes qui n'ont pas gardé leur propre livre, les distributions convenables sont dénombrées par $d_k$ (par définition de ce nombre).
   Cela donne donc $\boxed{\binom{n}{k} d_k \text{ telles distributions}}$.
   (b) Les distributions dénombrées par $u_n$ se répartissent en différents cas incompatibles selon le nombre $k$ de personnes qui repartent avec un livre différent de celui qu'elles ont amené. Ce nombre peut varier de 0 à $n$ et la question précédente dénombre les distributions correspondant à chacun de

ces cas. Par réunion disjointe des distributions en question, leur somme donne $u_n$.

Donc $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 2,\ u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} d_k}$.

7. Soit $n \geqslant 2$. Le but de cette question est (à l'inverse de la formule précédente) d'exprimer $d_n$ en fonction des $u_k$.

   (a) Soit $j, k \in [\![2, n]\!]$. $\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}\dfrac{k!}{j!(k-j)!} = \dfrac{n!}{j!}\dfrac{(n-j)!}{(n-j)!}\dfrac{1}{(n-k)!(k-j)!}$.

   Cela donne $\dfrac{n!}{j!(n-j)!}\dfrac{(n-j)!}{(n-k)!((n-j)-(n-k))!}$. Finalement, $\boxed{\binom{n}{k}\binom{k}{j} = \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k}}$.

   (b) $\forall j \in [\![2, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{j}(-1)^{n-k} = \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{j}\binom{n-j}{n-k}(-1)^{n-k} = \binom{n}{j}\sum_{k=j}^{n}\binom{n-j}{n-k}(-1)^{n-k}$.

   À l'aide du changement d'indice $i = n-k$, cela donne $\displaystyle\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{n-j}\binom{n-j}{i}(-1)^i$. Et la somme qui apparaît donne 1 si $n = j$ et 0 si $j < n$ car elle est le développement par le binôme de Newton de $(1-1)^{n-j}$. Finalement, $\boxed{\forall j \in [\![2, n]\!],\ \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{j}(-1)^{n-k} = \begin{cases} 1 \text{ si } j = n \\ 0 \text{ si } j < n \end{cases}}$.

   (c) On intervertit les sommations :

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\sum_{j=2}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}(-1)^{n-k}d_j\right) = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{k=j}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{j}(-1)^{n-k}d_j\right).$$

   On peut factoriser $d_j$, qui ne dépend pas de $k$ dans la somme intérieure.

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\sum_{j=2}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}(-1)^{n-k}d_j\right) = \sum_{j=2}^{n}d_j\left(\sum_{k=j}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{j}(-1)^{n-k}\right)$$

   puis on utilise la formule ci-dessus qui annule tous les termes sauf $j = n$.

   Finalement, $\boxed{\sum_{k=2}^{n}\left(\sum_{j=2}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}(-1)^{n-k}d_j\right) = d_n}$.

   (d) $\displaystyle d_n = \sum_{k=2}^{n}\left(\sum_{j=2}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}(-1)^{n-k}d_j\right) = \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\left(\sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}d_j\right)$.

   La somme à l'intérieur vaut $u_k - 1$ d'après une question précédente.

   $\displaystyle d_n = \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(u_k - 1) = \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}u_k - \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}$.

   Or $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\right) - \binom{n}{0}(-1)^n - \binom{n}{1}(-1)^{n-1}$, soit en appliquant le binôme de Newton : $(1-1)^n - n(-1)^{n-1} - (-1)^n = \boxed{-n(-1)^{n-1} - (-1)^n}$.

   Donc $\boxed{d_n = n(-1)^{n-1} + (-1)^n + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}u_k}$.

8. À l'aide de la question 5, $d_n = n(-1)^{n-1} + (-1)^n + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k}k!$.

Donc $d_n = n(-1)^{n-1} + (-1)^n + \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^{n-k}k!$ et on simplifie les factorielles.

$$d_n = n(-1)^{n-1} + (-1)^n + n!\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(n-k)!}(-1)^{n-k}.$$

Par le changement d'indice $k \mapsto n-k$, cela donne

$$d_n = n(-1)^{n-1} + (-1)^n + n!\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 2,\ d_n = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}$.

## Un avant-goût des probabilités

Parmi toutes les distributions possibles des livres, au nombre de $u_n$, celles où personne ne reçoit son propre livre sont au nombre de $d_n$. On s'intéresse à la proportion que cela représente et on appelle $p_n = \frac{d_n}{u_n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. En particulier, le but de cette partie est l'étude du comportement de la suite $(p_n)_{n\geqslant 2}$.

9. - Pour tout $n > 0$, $p_{2n+2} - p_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{1}{(2n+2)!} - \frac{1}{(2n+1)!} < 0$ donc $(p_{2n})$ est décroissante.
   - Pour tout $n > 0$, $p_{2n+3} - p_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+3)!} = \frac{1}{(2n+2)!} - \frac{1}{(2n+3)!} > 0$ donc $(p_{2n+1})$ est croissante.
   - Pour tout $n > 0$, $p_{2n+1} - p_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Donc $\boxed{(p_{2n})_{n\geqslant 1} \text{ et } (p_{2n+1})_{n\geqslant 1} \text{ sont adjacentes}}$.

10. Donc $(p_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(p_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ convergent vers une même limite $\ell$. Or ces deux suites sont deux suites extraites recouvrant tous les termes de $(p_n)$ donc $\boxed{(p_n) \text{ converge vers } \ell}$.

    Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{2n+1} \leqslant \ell$ et $\ell \leqslant p_{2n}$. En particulier $p_3 \leqslant \ell \leqslant p_2$, *i.e.* $\boxed{\ell \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]}$.

11. On applique le théorème à $f : x \mapsto \exp(-x)$ sur $[0,1]$, cette fonction étant bien de classe $\mathcal{C}^\infty$. Les dérivées successives donnent $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = (-1)^k$. Ainsi il existe $c \in [0,1]$ tel que

$$e^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}e^c.$$

Autrement dit $\frac{1}{e} - p_n = \frac{(-1)^{n+1}e^c}{(n+1)!}$.

Donc $\left|\frac{1}{e} - p_n\right| \leqslant \frac{e}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $\boxed{\ell = \frac{1}{e}}$.