Chapitre D3

Espaces vectoriels

Objectifs

- Notions d'espace vectoriel, de sous-espace vectoriel (sev).
- Éléments constitutifs d'un sev (vecteurs, famille génératrice).
- Relations entre sev (inclusion, supplémentarité).
- Notion d'application linéaire.
- Éléments caractéristiques d'un morphisme (noyau, image).
- Applications linéaires particulières.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque, le plus souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces vectoriels

1.1 Définition et premières propriétés

Définition D3.1

Soit E un ensemble. Une **loi de composition externe** sur E est une application « $\cdot$ »

$$\cdot : \begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda \cdot x \end{array}.$$

Définition D3.2 (Espace vectoriel)

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne notée $+$ et d'une loi de composition externe notée $\cdot$. On dit que E est un **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ (ou un $\mathbb{K}$**-espace vectoriel**) lorsque

(i) $(E,+)$ est un **groupe commutatif**, c'est-à-dire :

(N)➢ la loi $+$ admet un **élément neutre** dans E, noté 0_E,

(A)➢ la loi $+$ est **associative**,

(S)➢ tout $u \in E$ admet un **symétrique** par $+$, noté $-u$,

(C)➢ la loi $+$ est **commutative**.

(ii) la loi $\cdot$ vérifie les propriétés suivantes :

(A')➢ $\forall u \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$,

(N')➢ $\forall u \in E$, $1_{\mathbb{K}} \cdot u = u$,

(D1)➢ $\forall u, v \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$,

(D2)➢ $\forall u \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$.

Définition D3.3

Étant donné un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel E, les éléments de E sont appelés des **vecteurs** de E ; l'élément 0_E est appelé **vecteur nul**. $\mathbb{K}$ est appelé **corps de base** de E et ses éléments sont appelés des **scalaires**.

Notation. Pour tous $u, v \in E$, on note $u - v = u + (-v)$.

Proposition D3.4

Soit $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

(i) $0_{\mathbb{K}} \cdot u = 0_E$, (ii) $\lambda \cdot 0_E = 0_E$, (iii) $-u = (-1) \cdot u$.

Dém. D3.4

(i)
$$\begin{aligned}
0_{\mathbb{K}} \cdot u &= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + 0_E && (N)\\
&= 0_{\mathbb{K}} \cdot u + (u + (-u)) && (S)\\
&= (0_{\mathbb{K}} \cdot u + u) + (-u) && (A)\\
&= (0_{\mathbb{K}} \cdot u + 1 \cdot u) + (-u) && (N')\\
&= (0_{\mathbb{K}} + 1) \cdot u + (-u) && (D2)\\
&= 1 \cdot u + (-u) &&\\
&= u + (-u) && (N')\\
&= 0_E && (S)
\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}
\lambda \cdot 0_E &= \lambda \cdot (0_E + 0_E) && (N)\\
&= \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E && (D1)
\end{aligned}$$
donc (en ajoutant des deux côtés le symétrique de $\lambda \cdot 0_E$) : $0_E = \lambda \cdot 0_E$.

(iii)
$$\begin{aligned}
u + (-1) \cdot u &= 1 \cdot u + (-1) \cdot u && (N')\\
&= (1 + (-1)) \cdot u && (D2)\\
&= 0_{\mathbb{K}} \cdot u &&\\
&= 0_E && (i)
\end{aligned}$$
Donc le symétrique de u est bien $(-1) \cdot u$.

Proposition D3.5

Soit $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors

(i) $\lambda \cdot (u - v) = \lambda \cdot u - \lambda \cdot v$;

(ii) $(\lambda - \mu) \cdot u = \lambda \cdot u - \mu \cdot u$;

(iii) $-(\lambda \cdot u) = (-\lambda) \cdot u = \lambda \cdot (-u)$;

(iv) $\lambda \cdot u = 0_E \Leftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E)$;

(v) Si $u \neq 0_E$, alors $\lambda \cdot u = \mu \cdot u \Leftrightarrow \lambda = \mu$;

(vi) Si $\lambda \neq 0$ alors $\lambda \cdot u = \lambda \cdot v \Leftrightarrow u = v$.

Dém. D3.5

(i) $\lambda \cdot (u - v) = \lambda \cdot (u + (-1) \cdot v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot (-1) \cdot v = \lambda \cdot u + (-1) \cdot (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot u - \lambda \cdot v$;

(ii) $(\lambda - \mu) \cdot u = (\lambda + (-\mu)) \cdot u = \lambda \cdot u + (-\mu) \cdot u = \lambda \cdot u + (-1) \cdot (\mu \cdot u) = \lambda \cdot u - \mu \cdot u$;

(iii) $-(\lambda \cdot u) = (-1) \cdot (\lambda \cdot u) = (-\lambda \cdot u)$ et $-(\lambda \cdot u) = (-1) \cdot (\lambda \cdot u) = \lambda \cdot ((-1) \cdot u) = \lambda \cdot (-u)$;

(iv)
- La prop D3.4 donne le sens $\boxed{\Leftarrow}$
- Réciproquement, supposons $\lambda \cdot u = 0_E$. Si $\lambda \neq 0$, alors $u = \dfrac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot u) = \dfrac{1}{\lambda} \cdot 0_E = 0_E$.

(v) $\lambda \cdot u = \mu \cdot u \Leftrightarrow \lambda \cdot u - \mu \cdot u = 0 \Leftrightarrow (\lambda - \mu) \cdot u = 0 \Leftrightarrow \lambda - \mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu$ si $u \neq 0_E$.

(vi) $\lambda \cdot u = \lambda \cdot v \Leftrightarrow \lambda \cdot u - \lambda \cdot v = 0_E \Leftrightarrow \lambda \cdot (u - v) = 0_E \Leftrightarrow u - v = 0_E \Leftrightarrow u = v$ si $\lambda \neq 0_E$.

1.2 Exemples fondamentaux

Produit d'espaces vectoriels

Définition et proposition D3.6

Soit $(E_1, +, \cdot)$ et $(E_2, +, \cdot)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors on peut définir sur $E_1 \times E_2$ la loi de composition interne

$$\begin{array}{rrcl} + \ : & (E_1 \times E_2)^2 & \to & E_1 \times E_2 \\ & ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) & \mapsto & (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \end{array}$$

et la loi de composition externe

$$\begin{array}{rrcl} \cdot \ : & \mathbb{K} \times (E_1 \times E_2) & \to & E_1 \times E_2 \\ & (\lambda, (x_1, x_2)) & \mapsto & (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2) \end{array}$$

qui en font un $\mathbb{K}$-espace vectoriel : l'**espace vectoriel produit** de E_1 et E_2.

Remarque. Ceci permet de définir le plan $\mathbb{R}^2$ ainsi que tous les espaces $\mathbb{K}^n$.

Espaces de polynômes

Proposition D3.7

La loi externe

$$\begin{array}{rcrcl} \cdot & : & \mathbb{K}\times\mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}[X] \\ & & (\lambda, P) & \mapsto & \lambda \times P \end{array}$$

fait de $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de $(\mathbb{K}_n[X], +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Espaces de fonctions

Définition et proposition D3.8

Étant donnés un ensemble X et un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, \cdot)$, on note $\mathcal{F}(X, E)$ l'ensemble des fonctions $X \to E$. On peut définir la **somme** de fonctions et la **multiplication par un scalaire** : étant donnés $f, g \in \mathcal{F}(X, E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{array}{rcrcl} f+g & : & X & \to & E \\ & & x & \to & f(x)+g(x) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcrcl} \lambda\cdot f & : & X & \to & E \\ & & x & \to & \lambda\cdot f(x) \end{array}$$

qui font de $(\mathcal{F}(X, E), +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarques. Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel (dont le vecteur nul est la matrice nulle). $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un espace vectoriel (dont le vecteur nul est la suite nulle).

1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition D3.9

(i) Soit $(u_i)_{i=1\ldots n}$ une famille finie de vecteurs de E. On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs u_i un vecteur de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i,$$

où $\lambda_i \in \mathbb{K}$ pour tout $i = 1 \ldots n$.

(ii) Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de vecteurs de E. On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs u_i un vecteur de la forme

$$\sum_{i\in I} \lambda_i \cdot u_i,$$

où $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ est une famille presque nulle (autrement dit : à support fini) de scalaires.

Remarque. Un objectif est souvent de savoir exprimer n'importe quel vecteur comme combinaison linéaire de certains vecteurs de base, les λ_i jouant alors le rôle de coordonnées ; nous y reviendrons.

Définition D3.10

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-ensemble de E. On dit que F est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de E lorsque

(i) F est non-vide,

(ii) F est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire
- $\forall u, v \in F$, $u + v \in F$,
- $\forall u \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot u \in F$

Remarques.

- En pratique, pour montrer que F est non vide, on vérifiera le plus souvent que $0_E \in \mathbb{F}$.
- Les deux conditions de stabilité reviennent à dire que F est stable par combinaison linéaire, *i.e.*

$$\forall u, v \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F.$$

Proposition D3.11

Soit F un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$. Alors les restrictions à F des lois $+$ et $\cdot$ font de $(F, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque. Le plus souvent, pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, on s'attachera à montrer qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Proposition D3.12 (Intersection de sous-espaces)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(i) Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

(ii) Soit I un ensemble quelconque et soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition D3.13 (Sous-espace engendré)

Soit E un espace vectoriel et A une partie de E. On appelle **sous-espace vectoriel engendré par** A et on note $\operatorname{Vect} A$ l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A :

$$\operatorname{Vect} A = \bigcap_{\substack{H \text{ sev de } E \\ A \subset H}} H.$$

Théorème et définition D3.14

(i) Soit E un espace vectoriel et A une partie de E. $\operatorname{Vect} A$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A. Autrement dit, $F = \operatorname{Vect} A$ si et seulement si

- F est un sous-espace vectoriel de E,
- $A \subset F$,
- pour tout sous-espace G de E tel que $A \subset G$, on a $F \subset G$.

(ii) Soit I un ensemble tel que $A = \{u_i \mid i \in I\}$. Alors $\operatorname{Vect} A$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de A, noté $\operatorname{Vect}(u_i)_{i\in I}$. Dans ce cas, on dit que $(u_i)_{i\in I}$ est une **famille génératrice** de E.

Définition D3.15 (Somme de sous-espaces)

Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors la **somme de** F_1 **et** F_2 est l'ensemble

$$F_1 + F_2 = \{x \in E,\ \exists (x_1, x_2) \in F_1 \times F_2,\ x = x_1 + x_2\}.$$

Proposition D3.16

Soit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$F_1 + F_2 = \operatorname{Vect}(F_1 \cup F_2).$$

A fortiori, $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition D3.17 (Générateurs et sommes)

(i) Soit A et B deux parties d'un espace vectoriel E. Alors $\operatorname{Vect} A + \operatorname{Vect} B = \operatorname{Vect}(A \cup B)$.

(ii) Soit $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(v_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ deux familles de vecteurs de E.
On note $(w_k)_{1\leqslant k\leqslant m+n} = (u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m)$. Alors

$$\operatorname{Vect}\left((u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\right) + \operatorname{Vect}\left((v_j)_{1\leqslant j\leqslant m}\right) = \operatorname{Vect}\left((w_k)_{1\leqslant k\leqslant m+n}\right).$$

Définition D3.18

On dit que deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E sont **en somme directe** lorsqu'ils vérifient l'une des deux propriétés équivalentes suivantes.

(i) La décomposition de tout élément de $F_1 + F_2$ comme somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2 est unique.

(ii) $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

Théorème et définition D3.19

On dit que deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E sont **supplémentaires dans** E lorsqu'ils vérifient l'une des deux propriétés équivalentes suivantes.

(i) $\forall x \in E$, $\exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, $x = x_1 + x_2$.

(ii) $E = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

On note $E = F_1 \oplus F_2$.

2 Applications linéaires

Dans la suite, E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

2.1 Définitions

Définition D3.20

On dit qu'une application $f : E \to F$ est **linéaire** (ou $\mathbb{K}$**-linéaire**) de E dans F si

(i) $\forall x, y \in E$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$,

(ii) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$.

Remarque. On parle aussi de **morphisme** ou d'**homomorphisme** d'espaces vectoriels.

Proposition D3.21

Soit $f :\to F$ une application linéaire. Alors

(i) $f(0_E) = 0_F$,

(ii) $\forall x \in E$, $f(-x) = -f(x)$.

Définition D3.22

(i) Une application linéaire $E \to E$ est appelée **endomorphisme de** E.

(ii) Une application linéaire $E \to \mathbb{K}$ est appelée **forme linéaire sur** E.

Notations. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E)$ (on trouve parfois $\mathrm{End}(E)$) l'ensemble des endomorphismes de E.

2.2 Opérations

Proposition D3.23 (Structure)

L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E, F)$.

Remarque. En particulier, l'application nulle et la combinaison d'applications linéaires sont des applications linéaires.

Proposition D3.24 (Composition)

Soit E, F, G trois espaces vectoriels. Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications linéaires, alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.

Proposition D3.25

Soit $f, f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g, g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F, G)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

(i) $g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$,

(ii) $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$,

(iii) $g \circ (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot (g \circ f) = (\lambda \cdot g) \circ f$.

Remarque. Dans le cas où $E = F = G$, ces propriétés font de $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ un anneau.

2.3 Bijectivité

Proposition D3.26

Soit $f : E \to F$ une application linéaire et bijective. Alors la réciproque de f est une application linéaire $f^{-1} : F \to E$.

Définition D3.27

(i) On dit que $f : E \to F$ est un **isomorphisme de E dans F** si elle est linéaire et bijective.
On dit que E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E dans F.

(ii) On dit que $f : E \to E$ est un **automorphisme de E** si elle est linéaire et bijective.
On appelle **groupe linéaire** l'ensemble des automorphismes de E, noté $\mathrm{GL}(E)$.

Proposition D3.28

(i) Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux isomorphismes. Alors $g \circ f : E \to G$ est un isomorphisme.

(ii) Soit f et g deux automorphismes de E. Alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont deux automorphismes de E.

Remarque. Cette propriété fait de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ un groupe.

2.4 Noyau, image

Définition D3.29 (Noyau)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **noyau de** f, noté $\operatorname{Ker} f$, l'ensemble

$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E,\ f(x) = 0_F\}.$$

Proposition D3.30

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème D3.31

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Définition D3.32 (Image)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle image de f, notée $\operatorname{Im} f$, l'ensemble

$$\operatorname{Im} f = f(E) = \{y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)\}.$$

Proposition D3.33

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F.

Théorème D3.34

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Proposition D3.35

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $E = \operatorname{Vect}(u_i)_{i \in I}$, alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(x_i))_{i \in I}$.

2.5 Équations linéaires

Définition D3.36

On appelle **équation linéaire** une équation d'inconnue x de la forme

$$f(x) = b \tag{D3.1}$$

avec

- $f \in \mathcal{L}(E, F)$,
- $b \in F$ appelé **second membre** de l'équation.

Théorème D3.37 (Solutions d'une équation linéaire)

L'ensemble $(\mathcal{S})$ des solutions de l'équation linéaire (D3.1) est

soit vide,

soit un sous-espace affine de E dont la direction est $\operatorname{Ker} f$, c'est-à-dire : si x_0 est une solution de l'équation (D3.1), alors $\mathcal{S} = x_0 + \operatorname{Ker} f$.

Remarque. Pour résoudre une équation linéaire comme celle présentée en (D3.1), on se ramène souvent à trouver une solution particulière de cette équation, ainsi que l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre (appelée **équation homogène**) : $f(x) = 0_F$.

Proposition D3.38 (Principe de superposition)

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soit $(b_i)_{i=1\dots n}$ une famille d'éléments de F et $(\lambda_i)_{i=1\dots n}$ des scalaires. On considère l'équation (D3.1) avec $b = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$. Si pour tout $i = 1 \dots n$, x_i vérifie $f(x_i) = b_i$, alors

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

est une solution de l'équation (D3.1).

3 Projections, symétries

On suppose dans ce chapitre que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E, c'est-à-dire $E = F \oplus G$.

Définition D3.39 (Projection)

Si pour tout $x \in E$, on note $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, la **projection sur** F **parallèlement à** G est l'application

$$p : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F. \end{array}$$

Proposition D3.40

La projection p sur F parallèlement à G est linéaire et

(i) $\operatorname{Ker} p = G$ et $\operatorname{Im} p = F$.

(ii) $p_{|F} = \mathrm{Id}_F$ et $p_{|G} = 0$.

(iii) $p \circ p = p$.

Remarque. Si on appelle q la projection sur G parallèlement à F, alors on a

(i) $p + q = \mathrm{Id}_E$,

(ii) $F = \operatorname{Ker} q = \operatorname{Im} p$,

(iii) $G = \operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} q$.

Définition D3.41 (Projecteur)

On appelle **projecteur de** E tout endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ qui vérifie

$$p \circ p = p.$$

Proposition D3.42

Si p est un projecteur de E, alors c'est une projection sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

Définition D3.43 (Symétrie)

Si pour tout $x \in E$, on note $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$, la **symétrie d'axe** F **et de direction** G est l'application

$$s : \begin{array}{rcl} E & \to & E \\ x & \mapsto & x_F - x_G. \end{array}$$

Proposition D3.44 (Lien entre projection et symétrie)

Soit p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie d'axe F et de direction G. Alors

(i) $s = 2p - Id_E$,

(ii) $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Proposition D3.45

La symétrie s d'axe F et de direction G est linéaire et

(i) $F = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - s)$ et $G = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E + s)$.

(ii) $s_{|F} = \mathrm{Id}_F$ et $s_{|G} = -\mathrm{Id}_G$.

(iii) $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

Proposition D3.46

Si s vérifie $s \circ s = \mathrm{Id}_E$, alors c'est une symétrie d'axe $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - s)$ et de direction $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E + s)$.

Remarque. Un endomorphisme s tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ s'appelle une **involution**.

Méthodes

- Montrer qu'un ensemble est un sev
  - ➢ en vérifiant les stabilités,
  - ➢ en exhibant une famille génératrice.
- Montrer que deux sous-espaces sont supplémentaires.
- Montrer qu'une application est linéaire.
- Déterminer le noyau, l'image d'un morphisme.