TD D3. Espaces vectoriels

1 Espaces vectoriels

Exercice D3.1

Parmi les ensembles suivants, déterminer lesquels sont des sev d'un ev de référence. Le cas échéant et si cela est possible, en donner une famille génératrice.

1. Des polynômes.
   (a) $F_1 = \mathbb{K}_2[X]$,
   (b) $F_2 = \{P \in \mathbb{K}_3[X] \mid P(1) = 0\}$,
   (c) $F_3 = \{P \in \mathbb{K}_4[X] \mid P(1) = P'(1) = 0\}$.
2. Des fonctions.
   (a) $F_7 = \{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \mid f'' - 2f' + 2f = 0\}$,
   (b) $F_8 = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid ff' = 0\}$,
   (c) $F_9 = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid f + f'^2 = 0\}$.
3. Des suites.
   (a) l'ensemble F_4 des suites géométriques de raison 2,
   (b) l'ensemble F_5 des suites arithmétiques.
   (c) l'ensemble F_6 des suites géométriques.
4. Des matrices.
   (a) l'ensemble F_{10} des matrices 3×3 symétriques,
   (b) l'ensemble F_{11} des matrices 3×3 inversibles,
   (c) l'ensemble F_{12} des matrices 3×3 de trace nulle.

Exercice D3.2

Soit E l'ensemble des fonctions réelles. Parmi les ensembles suivants, dire lesquels sont des sev. de E.

1. L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$,
2. l'ensemble des fonctions monotones,
3. l'ensemble des fonctions telles que $f(28) = 0$,
4. l'ensemble des fonctions telles que $\exists x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$,
5. l'ensemble des fonctions admettant une période rationnelle
6. l'ensemble des fonctions admettant une limite finie en $+\infty$,
7. étant donné $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, l'ensemble des fonctions ayant pour limite α en $+\infty$,
8. l'ensemble des fonctions admettant une limite (finie ou infinie) en $+\infty$.

Exercice D3.3

Parmi les ensembles suivants, déterminer lesquels sont des sev d'un ev de référence. Le cas échéant, en donner une famille génératrice.

1. $F_1 = \{(4t, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
2. $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0\}$.
3. $F_3 = \{(4t + 1, -t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.
4. $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x - y + z = 0\}$.
5. $F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z \geqslant 0\}$.
6. $F_6 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid 2x - y + z - t = 0\}$.
7. $F_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$.
8. $F_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$.
9. $F_9 = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \mid x - y + z = 0 \text{ et } -x - y + z = 0\}$.
10. $F_{10} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid 2x - y + z - t = 0 \text{ et } y + z = 1\}$.

Exercice D3.4 ✪

Dans $\mathbb{R}^3$, soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$ et $G = \{(s - t, s + t, t),\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$.

Exercice D3.5 ✪

Chacune des familles suivantes est-elle une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

1. $\mathscr{F}_1 = ((1,2,1),(3,0,1))$,
2. $\mathscr{F}_2 = ((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$,
3. $\mathscr{F}_3 = ((1,1,2),(1,-1,3),(1,3,1))$,
4. $\mathscr{F}_4 = ((1,1,2),(1,0,3),(2,1,2),(1,0,2))$.

Exercice D3.6 ✲

Dans $\mathbb{C}^3$, soit $u_1 = (1-i, i, 1+i)$, $u_2 = (-1,1,3)$ et $u_3 = (1-i, i, i)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une famille génératrice de $\mathbb{C}^3$ et donner la décomposition de $u = (1+i, 2, i)$ comme combinaison linéaire de (u_1, u_2, u_3).

Exercice D3.7 ✲

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $x_1, \dots, x_p \in E$ et $x_{p+1} \in \operatorname{Vect}(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$. Montrer que

$$\operatorname{Vect}(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p+1} = \operatorname{Vect}(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}.$$

Exercice D3.8 ✲

1. Faux ou faux ? Justifier. Soit E un espace vectoriel et X et Y deux parties de E.

   (a) $X \subset Y \Leftrightarrow \operatorname{Vect} X \subset \operatorname{Vect} Y$,
   (b) $\operatorname{Vect}(X \cap Y) = \operatorname{Vect} X \cap \operatorname{Vect} Y$,
   (c) $\operatorname{Vect}(X \cup Y) = \operatorname{Vect} X \cup \operatorname{Vect} Y$,
   (d) $\operatorname{Vect} X = X \Leftrightarrow X = E$.

2. Concevoir un exercice intitulé "Vrai ou vrai ? Justifier." dont les 4 items ressembleraient aux assertions ci-dessus, modifiées de la manière la plus infime possible.
3. Répondre aux questions de ce nouvel exercice.

Exercice D3.9 ✲

Dans $\mathbb{R}^3$, soit $F = \operatorname{Vect}((1,1,0),(1,0,1))$ et $G = \operatorname{Vect}((1,2,-1),(3,1,2))$. Montrer que $F = G$.

Exercice D3.10 ✲✲

1. Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = \operatorname{Vect}\big((X-1)^2, (X-1)(X+1), (X+1)^2\big)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Vect}(x \mapsto \cos(kx))_{0 \leqslant k \leqslant n} = \operatorname{Vect}\Big(x \mapsto \cos^k(x)\Big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$.

Exercice D3.11

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que

$$F \cup G = F + G \Leftrightarrow F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

Exercice D3.12 ✲

Soit $F = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ et $G = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z=0 \text{ et } y-z+t=0\right\}$. Montrer que F et G sont deux sev supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.

Exercice D3.13

Dans $\mathbb{R}^4$, soit $a = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $e = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$. Dans chacun des cas suivants : a-t-on $\mathbb{R}^4 = F + G$? F et G sont-ils en somme directe dans $\mathbb{R}^4$? Sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

1. $F = \mathrm{Vect}(a, b)$ et $G = \mathrm{Vect}(c)$,
2. $F = \mathrm{Vect}(a, b)$ et $G = \mathrm{Vect}(d, e)$,
3. $F = \mathrm{Vect}(a, c, d)$ et $G = \mathrm{Vect}(b, e)$,
4. $F = \mathrm{Vect}(a, d)$ et $G = \mathrm{Vect}(c, e)$.

Exercice D3.14

On appelle E l'ensemble des suites réelles convergentes, F l'ensemble des suites de limite nulle et G l'ensemble des suites constantes.

1. Montrer que E, F et G sont des espaces vectoriels.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice D3.15

On appelle E l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, F l'ensemble des fonctions affines et G l'ensemble des fonctions $f \in E$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$.

1. Montrer que E, F et G sont des espaces vectoriels.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice D3.16

Montrer que $\left\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(X^2) = X^2 P(X)\right\}$ et $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(2)\}$ sont deux sev supplémentaires de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice D3.17

Déterminer un supplémentaire des sev suivants.

1. $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = P(2) = 0\}$.
2. $\{P \in \mathbb{R}_4[X] \mid P(-X) = P(X)\}$.

2 Applications linéaires

Exercice D3.18

Les applications suivantes sont-elles des morphismes d'espaces vectoriels ? Le cas échéant, déterminer leur noyau et leur image.

1. $\begin{array}{rcl} f_1 : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$
2. $\begin{array}{rcl} f_2 : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x - y, x + z) \end{array}$
3. $\begin{array}{rcl} f_3 : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & xyz \end{array}$
4. $\begin{array}{rcl} f_4 : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & 2f + f' \end{array}$
5. $\begin{array}{rcl} f_5 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u_n) & \mapsto & (u_0, u_1) \end{array}$
6. $\begin{array}{rcl} f_6 : \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & (X^2 + 1)P \end{array}$
7. $\begin{array}{rcl} f_7 : \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) \end{array}$
8. $\begin{array}{rcl} f_8 : \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array}$
9. $\begin{array}{rcl} f_9 : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M + M^\intercal \end{array}$

Exercice D3.19

Soit

$$\begin{array}{rrcl} \varphi : & \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ & P & \mapsto & XP' - 2P \end{array}.$$

Montrer que φ est un endomorphisme, déterminer son image et son noyau.

Exercice D3.20

Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ avec E, F et G des ev.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$.
2. Montrer que $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g$.
3. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(g \circ f) \Leftrightarrow \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0_F\}$.
4. Montrer que $\operatorname{Im}(g \circ f) = \operatorname{Im} g \Leftrightarrow \operatorname{Ker} g + \operatorname{Im} f = F$.

Exercice D3.21

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $u^2 = u \circ u$

1. Montrer que $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$.
2. Montrer que $\operatorname{Im} u^2 \subset \operatorname{Im} u$.
3. Montrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$.
4. Montrer que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2 \Leftrightarrow \operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u = E$.

Exercice D3.22

Soit $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$. On suppose que f et g commutent. Montrer que $\operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Ker} g$ sont stables par f.

Exercice D3.23

Soit $f, g, h \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = h$, $g \circ h = f$ et $h \circ f = g$.

1. Montrer que f, g et h ont même noyau N et même image I.
2. Montrer que $f^5 = f$. En déduire que $E = N \oplus I$.

Exercice D3.24

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E$, $\exists \lambda \in E$, $u(x) = \lambda x$.
Montrer que $\exists \lambda \in E$, $\forall x \in E$, $u(x) = \lambda x$.

Exercice D3.25

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que p est un projecteur si et seulement si $\operatorname{Id} - p$ en est un aussi.
2. Montrer que $\operatorname{Ker}(\operatorname{Id} - p) = \operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im}(\operatorname{Id} - p)$.

Exercice D3.26

Soient $p, q \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence entre

(i) $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$,

(ii) p et q sont des projecteurs et $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q$.

Exercice D3.27

Soit p et q deux projecteurs du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
2. Dans ce cas, montrer que $\operatorname{Im}(f + g) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$ et $\operatorname{Ker}(p + q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.