MPSI Paul Valéry *pour le 19/03/2025*

DEVOIR MAISON N° 15

La présentation, l'orthographe et la qualité de la rédaction seront prises en compte.
Les résultats devront être $\boxed{\textbf{encadrés}}$.
La recherche de l'intégralité du sujet est indispensable pour tous.
Cependant, vous rédigerez un devoir par binôme, avec relecture mutuelle. Bien sûr les écritures des deux signataires devront apparaître de manière significative dans la copie.

Problème 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f_n : x \mapsto \ln x + nx$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions qui le sont, et a pour limites $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$. Elle est donc bijective et à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc $\boxed{\text{l'équation } \ln x + nx = 0 \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R}_+^*}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_{n+1}(x_n) = \ln(x_n) + (n+1)x_n = \ln(x_n) + nx_n + x_n = x_n > 0$.
Or $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 < f_{n+1}(x_n)$. La fonction f_{n+1} étant strictement croissante, $x_{n+1} > x_n$.
Finalement, $\boxed{\text{la suite } (x_n) \text{ est décroissante}}$.
3. (x_n) est décroissante et majorée par 0, donc $\boxed{\text{elle converge}}$. Notons ℓ sa limite, qui est un réel positif ou nul.
Si $\ell > 0$, alors on aurait $0 = f_n(x_n) = \ln(x_n) + nx_n$; or cette expression tend vers $+\infty$ en $+\infty$, ce qui est absurde. Donc $\boxed{\ell = 0}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = nx_n$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n + \ln y_n = nx_n + \ln(nx_n) = nx_n + \ln(x_n) + \ln(n) = \boxed{\ln(n)}$.
5. On a $y_n + \ln y_n = \ln n$, donc $y_n \left(1 + \dfrac{\ln y_n}{y_n}\right) = \ln n$.
Or $f_n(1/n) = 1 - \ln(n) < 0$ pour $n \geqslant 3$. D'où $x_n > 1/n$ (croissance de f_n).
Donc pour $n \geqslant 3$, $y_n = nx_n > 1$, d'où $0 \leqslant \dfrac{\ln y_n}{y_n} < 1$ et $1 \leqslant 1 + \dfrac{\ln y_n}{y_n} < 2$.
Finalement, $y_n = \dfrac{\ln n}{1 + \dfrac{\ln y_n}{y_n}} \geqslant \dfrac{\ln n}{2}$. Par comparaison, $\boxed{y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$.
6. $\dfrac{\ln y_n}{y_n} = -\dfrac{1}{y_n}\ln(1/y_n)$ avec $\dfrac{1}{y_n} \to 0$. Donc par croissances comparées, $\dfrac{\ln y_n}{y_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'où $\ln y_n = o(y_n)$. Puis $y_n - \ln n = -\ln(y_n) = o(y_n)$, ce qui équivaut à $\boxed{y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n}$.
7. Donc $\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}}$.
8. (a) Soit (u_n) et (v_n) deux suites qui tendent vers $+\infty$. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
Alors $\dfrac{\ln u_n}{\ln v_n} = \dfrac{\ln\left(v_n \frac{u_n}{v_n}\right)}{\ln v_n} = 1 + \underbrace{\dfrac{1}{\ln v_n}}_{\to 0}\underbrace{\ln\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)}_{\to 0}$.
Cette quantité tend vers 1, ce qui montre que $\boxed{\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln v_n}$.

(b) On a $y_n - \ln n = -\ln y_n$. Or $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$ et elles tendent vers $+\infty$.
Donc d'après ce qui précède, $y_n - \ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(\ln n)$.
En divisant par n, $\boxed{x_n - \dfrac{\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(\ln n)}{n}}$.

9. Soit $z_n = y_n - \ln n + \ln(\ln n) = -\ln(y_n) + \ln(\ln n) = -\ln\left(\dfrac{\ln n}{y_n}\right) = -\ln\left(1 + \dfrac{\ln y_n}{y_n}\right)$.
Or $\dfrac{\ln y_n}{y_n} \to 0$, donc d'après un équivalent usuel du ln, $z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln y_n}{y_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(\ln n)}{\ln n}$.
En divisant par n, $\boxed{x_n - \dfrac{\ln n}{n} - \dfrac{\ln(\ln n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln(\ln n)}{n \ln n}}$.

Problème 2

Le but de ce problème est de trouver un équivalent de $n!$ quand $n \to +\infty$. Il se compose de trois parties. Les deux premières sont indépendantes et la troisième utilise les deux résultats finaux des parties précédentes. Ceux-ci pourront être admis pour poursuivre le problème.

Intégrales de Wallis

1. Pour tout n, $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$, donc $\dfrac{n+1}{n+2} I_n \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$. Et $I_n \neq 0$, donc $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$. Par théorème d'encadrement, $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donc $\boxed{I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} I_n}$.
2. Pour tout n, $\dfrac{\pi}{2} = (n+1) I_n I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} (n+1) I_n^2 \sim n I_n^2$, donc $\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}}$.
3. Comme $I_{2k+1} \sim I_{2k}$, $\dfrac{(2k+1) I_{2k+1}}{2k I_{2k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$. Or $\dfrac{(2k+1) I_{2k+1}}{2k I_{2k}} = \dfrac{2^{4k} k!^4}{2k (2k)!^2} \dfrac{2}{\pi}$.
Finalement, $\boxed{\pi = \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{2^{4k} (k!)^4}{k ((2k)!)^2}}$.

Un encadrement

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction concave de classe $\mathcal{C}^2$. Soit g la fonction affine définie sur $[a,b]$ par $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$.

4. $\boxed{g(t) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) + f(a)}$.
5. f étant concave, sa courbe est au dessus de chacune de ses cordes. Notamment, entre a et b, $f(t) \geqslant g(t)$.
Puis par croissance de l'intégrale, $\boxed{\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$.
6. $\boxed{\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{(b-a)^2}{2} + f(a)(b - a)}$.

7. f est de classe $\mathcal{C}^2$ donc f'', et donc $|f''|$, est continue sur un intervalle fermé $[a,b]$, donc elle atteint son maximum $\boxed{M_2 = \max_{t\in[a,b]} |f''(t)|}$.

8. Le but de cette question est de montrer que
$$\forall t \in [a,b], \quad f(t) - g(t) \leqslant M_2 \frac{(t-a)(b-t)}{2}. \tag{❀}$$
   (a) Pour $t = a$ et $t = b$, l'inégalité (❀) revient à $0 \leqslant 0$, vrai.
   (b) Soit $t \in]a,b[$. On pose h définie sur $[a,b]$ par $h(x) = f(x) - g(x) - K(x-a)(b-x)$ où K est une constante telle que $h(t) = 0$.
   h est de classe $\mathcal{C}^2$ car f (et g) le sont et $\boxed{h'' : t \mapsto f''(t) + 2K}$.
   (c) D'après le théorème de Rolle (vérifier soigneusement les hypothèses), il existe $c_1 \in]a,t[$ et $c_2 \in]t,b[$ tels que $h'(c_1) = h'(c_2) = 0$. À l'aide du théorème de Rolle à nouveau, cette fois appliqué à h', $\boxed{\exists c \in]a,b[,\ h''(c) = 0}$.
   (d) Alors $f''(c) + 2K = 0$, d'où $K = -\frac{f''(c)}{2}$. Donc $\boxed{|K| \leqslant \frac{M_2}{2}}$ puis comme $h(t) = 0$, on a l'inégalité (❀) souhaitée.

9. À partir de l'inégalité (❀) précédente, par croissance de l'intégrale, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant -\frac{M_2}{2}\int_a^b (t^2-(a+b)t+ab)\,\mathrm{d}t$. Or $\int_a^b (t^2-(a+b)t+ab)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{a+b}{2}t^2 + abt\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3} - \frac{a+b}{2}(b^2-a^2) + ab(b-a) = \frac{b-a}{6}\big((2b^2+2ab+2a^2) - 3(a+b)^2 + 6ab\big) = -\frac{(b-a)^3}{6}$.
   Finalement $\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M_2 \frac{(b-a)^3}{12}}$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est bien $\mathcal{C}^2$ sur $[n, n+1]$.
   On a pour tout $t \in [n,n+1]$, $f''(t) = -\frac{1}{t^2}$ qui est négative donc f est concave. De plus $|f''(t)| leqs \frac{1}{n^2}$.
   La corde correspondante a pour équation $g : t \mapsto (\ln(n+1) - \ln(n))(t-n) + \ln(n)$ et son intégrale vaut $\int_n^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\ln(n+1) - \ln(n)) + \ln(n) = \frac{1}{2}(\ln(n+1) + \ln(n))$.
   Et à l'aide d'une IPP, $\int_n^{n+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_n^{n+1} = (n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) - 1$.
   Finalement, $\boxed{0 \leqslant \left(n + \frac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 \leqslant \frac{1}{12n^2}}$.

Formule de Stirling

Étant donné $n > 1$ un nombre entier, on pose
$$u_n = \ln\left(n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}\right) - \ln(n!) \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{12(n-1)}.$$

11. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)(\ln(n+1) - \ln(n)) - 1 \geqslant 0$ d'après ce qui précède et $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n - \frac{1}{12n(n-1)} \leqslant \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{12n(n-1)} \leqslant 0$, d'après l'encadrement précédent à nouveau. De plus

$v_n - u_n = \dfrac{1}{12(n-1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes}}$. On note ℓ leur limite commune.

12. D'une part $2u_n - u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\ell - \ell = \ell$.

    D'autre part, $2u_n - u_{2n} = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{n(2n)!^2}{2^{4n+1}n!^4}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)$ d'après 10.

    Par unicité de la limite, $\boxed{\ell = -\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)}$.

13. On a donc : $-u_n = \ln\left(\dfrac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}\ln(2\pi)$. D'où la formule de Stirling :

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}.$$