Équations affines

AR - 5

Présenter comme un sous-espace affine chacun des ensembles suivants.

1. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \mid x - y = 1 \text{ et } x + z = 1 \right\}$,
2. $G = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(1) = 2 \text{ et } P'(1) = 1\}$,
3. $H = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + 2f(x) = 2x + 1 \right\}$.

Présenter comme un sous-espace affine :

1. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \mid x - y = 1 \text{ et } x + z = 1 \right\}$.

Présenter comme un sous-espace affine :

1. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \mid x - y = 1 \text{ et } x + z = 1 \right\}.$

Réponse : Soit $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a $u_0 \in F$.

Présenter comme un sous-espace affine :

1. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \mid x - y = 1 \text{ et } x + z = 1 \right\}$.

Réponse : Soit $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a $u_0 \in F$.

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \to & \mathbb{K}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x - y \\ x + z \end{pmatrix} \end{array}$. $u \in F \Leftrightarrow u - u_0 \in \operatorname{Ker} f$.

Présenter comme un sous-espace affine :

1. $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \mid x - y = 1 \text{ et } x + z = 1 \right\}$.

Réponse : Soit $u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a $u_0 \in F$.

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \to & \mathbb{K}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x - y \\ x + z \end{pmatrix} \end{array}$. $u \in F \Leftrightarrow u - u_0 \in \operatorname{Ker} f$.

$F = u_0 + \operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 1 + \lambda \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\}$.

Présenter comme un sous-espace affine :

2. $G = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(1) = 2 \text{ et } P'(1) = 1\}$.

Présenter comme un sous-espace affine :

2. $G = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(1) = 2 \text{ et } P'(1) = 1\}$.

Réponse : Soit $P_0 = 1 + X$. On a $P_0 \in G$.

Présenter comme un sous-espace affine :

2. $G = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(1) = 2 \text{ et } P'(1) = 1\}$.

Réponse : Soit $P_0 = 1 + X$. On a $P_0 \in G$.

Soit $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}^2 \\ P & \mapsto & (P(1), P'(1)) \end{array}$. $P \in G \Leftrightarrow P - P_0 \in \operatorname{Ker} g$.

Présenter comme un sous-espace affine :

2. $G = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(1) = 2 \text{ et } P'(1) = 1\}$.

Réponse : Soit $P_0 = 1 + X$. On a $P_0 \in G$.

Soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}^2 \\ P & \mapsto & (P(1), P'(1)) \end{array}$. $P \in G \Leftrightarrow P - P_0 \in \operatorname{Ker} g$.

$G = P_0 + \operatorname{Ker} g = \left\{(1 + X) + (X - 1)^2 Q(X) \mid Q \in \mathbb{K}[X]\right\}$.

Présenter comme un sous-espace affine :

3. $H = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + 2f(x) = 2x + 1 \right\}$.

Présenter comme un sous-espace affine :

3. $H = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + 2f(x) = 2x + 1 \right\}$.

Réponse : Soit $f_0 : x \mapsto x$. On a $f_0 \in H$.

Équations affines AR - 5

Présenter comme un sous-espace affine :

3. $H = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + 2f(x) = 2x + 1 \right\}$.

Réponse : Soit $f_0 : x \mapsto x$. On a $f_0 \in H$.
Soit $h : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' + 2f \end{array}$. $f \in H \Leftrightarrow f - f_0 \in \mathrm{Ker}\, h$.

Présenter comme un sous-espace affine :

3. $H = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + 2f(x) = 2x + 1 \right\}$.

Réponse : Soit $f_0 : x \mapsto x$. On a $f_0 \in H$.

Soit $h : \begin{array}{rcl} \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f' + 2f \end{array}$. $f \in H \Leftrightarrow f - f_0 \in \operatorname{Ker} h$.

$f = f_0 + \operatorname{Ker} h = \left\{ x \mapsto x + \lambda e^{-2x} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.