Sol B6.
Comparaisons locales

Solution B6.6

(g) $\sin(1/n) \to 0$ donc $\sin(1/n) = o(1)$ donc $\sin(1/n) + 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$. Et $\frac{1}{n^2} \to 0$ donc $\tan(\frac{1}{n^2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.
Donc $\dfrac{\sin(1/n)+1}{\tan(\frac{1}{n^2})} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\frac{1}{n^2}} = n^2$.

(h) Tout d'abord

$$\begin{aligned} e^{\sin\sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - \cos\frac{1}{\sqrt[4]{n}} &= \left(e^{\sin\sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - 1\right) - \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) - 1\right) \\ &= \left(e^{\sin\sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - 1\right)\left(1 - \frac{\cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) - 1}{e^{\sin\sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - 1}\right). \end{aligned}$$

Or $e^{\sin\sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \sin\sqrt{\dfrac{\ln n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\ln n}{n}}$ car $\sqrt{\dfrac{\ln n}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Et $\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ car $\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Donc $\dfrac{\cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) - 1}{e^{\sin\sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - 1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2\sqrt{\ln n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $\left(1 - \dfrac{\cos\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) - 1}{e^{\sin\sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - 1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
Finalement $e^{\sin\sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - \cos\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{\sin\sqrt{\frac{\ln n}{n}}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\ln n}{n}}$ comme vu précédemment.

(i) $\ln\left(\dfrac{n^2-n+5}{n^2+n-3}\right) = \ln\left(\dfrac{n^2+n-3-2n+8}{n^2+n-3}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{-2n+8}{n^2+n-3}\right)$. Or $\dfrac{-2n+8}{n^2+n-3} \to 0$.
Donc $\ln\left(\dfrac{n^2-n+5}{n^2+n-3}\right) \sim \dfrac{-2n+8}{n^2+n-3} \sim \dfrac{-2}{n}$.

(j) $\ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \to 0$ donc $\tan\left(\ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.
$\ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(1 + \left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1\right)\right)$ et $\cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 \to 0$.
Donc $\ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right) \sim \cos\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1 \sim -\dfrac{1}{2n^2}$.

Solution B6.8

Soit $\alpha > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. $x^2 - x \xrightarrow[x\to1]{} 0$ donc $\ln(1+x^2-x) \underset{x\to1}{\sim} (x^2-x) = x(x-1) \underset{x\to1}{\sim} x-1$ car $x \xrightarrow[x\to1]{} 1$.
Au dénominateur, $x^2 \xrightarrow[x\to1]{} 1$ et $x+2 \xrightarrow[x\to1]{} 3$ donc $x^2(x-1)(x+2) \underset{x\to1}{\sim} 3(x-1)$.
Finalement $\dfrac{\ln(1+x^2-x)}{x^2(x-1)(x+2)} \underset{x\to1}{\sim} \dfrac{1}{3}$, autrement dit $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(1+x^2-x)}{x^2(x-1)(x+2)} = \dfrac{1}{3}$.

7.

$$\begin{aligned}\frac{x^\alpha-\alpha^x}{x^x-\alpha^\alpha}&=\frac{e^{\alpha\ln x}-e^{x\ln\alpha}}{e^{x\ln x}-e^{\alpha\ln\alpha}}\\&=\underbrace{\frac{e^{\alpha\ln x}}{e^{\alpha\ln\alpha}}}_{\xrightarrow[x\to\alpha]{}1}\ \frac{1-e^{x\ln(\alpha)-\alpha\ln(x)}}{e^{x\ln(x)-\alpha\ln(\alpha)}-1}.\end{aligned}$$

Or $x\ln(\alpha)-\alpha\ln(x)\xrightarrow[x\to\alpha]{}1$ et $x\ln(x)-\alpha\ln(\alpha)\xrightarrow[x\to\alpha]{}1$. Donc

$$\begin{aligned}\frac{x^\alpha-\alpha^x}{x^x-\alpha^\alpha}&\underset{x\to\alpha}{\sim}\frac{x\ln(\alpha)-\alpha\ln(x)}{x\ln(x)-\alpha\ln(\alpha)}\\&=\frac{x\ln(\alpha)-\alpha\ln(\alpha)+\alpha\ln(\alpha)-\alpha\ln(x)}{x\ln(x)-\alpha\ln(\alpha)}\\&=\frac{(x-\alpha)\left(\ln(\alpha)+\alpha\frac{\ln(\alpha)-\ln(x)}{x-\alpha}\right)}{x\ln(x)-\alpha\ln(\alpha)}.\end{aligned}$$

Deux taux d'accroissements : d'une part $\dfrac{x\ln(x)-\alpha\ln(\alpha)}{x-\alpha}\xrightarrow[x\to\alpha]{1}+\ln\alpha$ donc $\dfrac{x-\alpha}{x\ln(x)-\alpha\ln(\alpha)}\xrightarrow[x\to\alpha]{\frac{1}{1+\ln\alpha}}$; d'autre part $\dfrac{\ln(\alpha)-\ln(x)}{x-\alpha}\xrightarrow[x\to\alpha]{-}\dfrac{1}{\alpha}$.

Finalement $\dfrac{x^\alpha-\alpha^x}{x^x-\alpha^\alpha}\xrightarrow[x\to\alpha]{-}\dfrac{1}{1+\ln\alpha}(\ln(\alpha)-1)=\dfrac{1-\ln\alpha}{1+\ln\alpha}$.

8. $\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{\lambda x}=\exp\left(\lambda x\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)\right)$.

Or $\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)=\ln\left(1-\dfrac{1}{x+2}\right)\sim-\dfrac{1}{x+2}$. Donc $\lambda x\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{-\lambda x}{x+2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}-\lambda$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{\lambda x}=e^{-\lambda}$.